1 COORDENADAS POLARES

Las coordenadas polares dan una forma alternativa de escribir la posición de partículas en el plano. Supongamos una partícula que se encuentra en el plano $x-y$. Usando coordenadas y versores cartesianos escribimos su posición como:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}, \tag{1}$$

donde las coordenadas x e y corresponden a la proyección del vector posición, $\vec{r}$, sobre los ejes cartesianos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Las coordenadas polares corresponden al tamaño del vector posición, $r \equiv |\vec{r}|$, y al ángulo, φ que forma $\vec{r}$ con el eje x, midiendo ángulos positivos desde el eje $x > 0$ hacia el $y > 0$. Por lo tanto, r y φ se relacionan con x e y mediante:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\arctan(y/x)$ es el arco tangente de y/x (es decir, $\tan(\varphi) = y/x$). Equivalentemente, la relación inversa está dada por:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi), \\ y &= r\sin(\varphi). \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto, usando coordenadas polares y versores cartesianos el vector posición de una partícula sobre el plano se escribe como:

$$\vec{r} = r\cos(\varphi)\hat{x} + r\sin(\varphi)\hat{y}, \tag{4}$$

donde sin corresponde al seno del ángulo. Además de las coordenadas polares se definen también versores polares. A diferencia de los versores cartesianos, los versores polares no apuntan en el mismo sentido para cualquier punto del espacio: su orientación depende del punto del plano. El versor $\hat{r}$ apunta en el mismo sentido que $\vec{r}$. Como tiene norma 1, está dado por: $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/r$. El versor $\hat{\varphi}$ es perpendicular a $\hat{r}$ en cada punto del plano y apunta en el sentido en que crece la coordenada φ. Así como $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ (con $\times$ indicando el producto vectorial), es también: $\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$. Usando coordenadas y versores polares el vector posición de una partícula sobre el plano se escribe como:

$$\vec{r} = r\hat{r}. \tag{5}$$

La velocidad de una partícula que se mueve sobre el plano también puede escribirse usando coordenadas y versores polares. La mayor diferencia respecto del caso de versores cartesianos radica en que, como la orientación de los versores polares cambia con el punto del plano, al cambiar la partícula de posición no sólo pueden cambiar las coordenadas, r y φ, sino también los versores. En el caso cartesiano esto no es así: al cambiar la partícula de lugar sólo cambian sus coordenadas, x e y. La variación de los versores polares introduce una dificultad adicional al tener que derivar en el tiempo. De todos modos, la dificultad adicional se reduce a saber calcular las derivadas temporales de estos versores. Para esto último escribimos los versores $\hat{r}$ y $\hat{\varphi}$ usando coordenadas polares y versores cartesianos. Escribir $\hat{r}$ es sencillo ya que está dado por $\hat{r} = \vec{r}/r$. Geométricamente es posible deducir cómo escribir $\hat{\varphi}$. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}, \\ \hat{\varphi} &= -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dadas estas expresiones, teniendo en cuenta que ni $\hat{x}$ ni $\hat{y}$ varían en el tiempo, es posible calcular las derivadas temporales de $\hat{r}$ y $\hat{\varphi}$ en función de las de r y φ. Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{r}} &= \frac{d\cos(\varphi)}{dt}\hat{x} + \frac{d\sin(\varphi)}{dt}\hat{y} = -\dot{\varphi}\sin(\varphi)\hat{x} + \dot{\varphi}\cos(\varphi)\hat{y} = \dot{\varphi}(-\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}) = \dot{\varphi}\hat{\varphi}, \\
\dot{\hat{\varphi}} &= \frac{d(-\sin(\varphi))}{dt}\hat{x} + \frac{d\cos(\varphi)}{dt}\hat{y} = -\dot{\varphi}\cos(\varphi)\hat{x} - \dot{\varphi}\sin(\varphi)\hat{y} = -\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}) = -\dot{\varphi}\hat{r}, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

donde usamos la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sin(\varphi)}{dt} &= \frac{d\sin(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \cos\varphi\,\dot{\varphi}, \\
\frac{d\cos(\varphi)}{dt} &= \frac{d\cos(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

y las Ecs. (6). Noten que $\dot{\hat{r}}$ está en la dirección de $\hat{\varphi}$ y viceversa. Esto era de esperar ya que, como los versores no pueden variar de tamaño (su módulo es siempre 1), sus derivadas temporales deben ser siempre perpendiculares a ellos (o nulas). Estamos ahora en condiciones de calcular la velocidad y la aceleración de una partícula usando coordenadas y versores polares. La velocidad resulta:

$$
\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}. \qquad (9)
$$

Derivando la Ec. (9) obtenemos la aceleración:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r}) + \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\dot{\hat{\varphi}} \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - r\dot{\varphi}^2\hat{r} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

En resumen, usando coordenadas y versores polares el vector posición, la velocidad y la aceleración se escriben del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= r\hat{r}, \qquad (11) \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} \qquad (12) \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Las coordenadas y versores polares pueden utilizarse para describir cualquier movimiento en el plano. En particular, son útiles cuando las partículas se mueven sobre arcos de circunferencia. Las coordenadas y versores polares en el plano $x-y$ pueden combinarse con la coordenada y el versor cartesianos, z y $\hat{z}$, para describir posiciones (y movimientos) en tres dimensiones. A este conjunto de coordenadas, r, φ, z se las llama cilíndricas. El vector posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas se escriben del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= r\hat{r} + z\hat{z}, \qquad (14) \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z} \qquad (15) \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z}. \qquad (16)
\end{aligned}
$$