Fuerzas de arrastre

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido (aire, agua,…) el mismo ejerce una fuerza de resistencia (conocida como *fuerza de arrastre*) **que tiende a reducir** su velocidad.

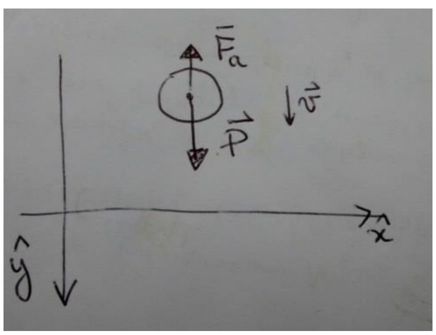
La fuerza de arrastre depende de propiedades del fluido y del tamaño, forma y velocidad del objeto relativa al fluido. De acuerdo a si el objeto se desplaza a alta o baja velocidad, dicha fuerza puede ser lineal o cuadrática en *v*

$$\overrightarrow{f_a} = \begin{cases} -b_1\vec{v} \text{ (para velocidades pequeñas)} \\ -b_2 v^2 \hat{v} \text{ (para velocidades grandes)} \end{cases}$$

Notar que:

1) la dirección de $\overrightarrow{f_a}$ es el de la velocidad del objeto relativa al fluido, y su sentido se opone al movimiento (es decir siempre produce una desaceleración)
2) en las constantes b_i se encuentran las dependencias con las propiedades mencionadas del fluido y del objeto.
3) Dimensiones: $[b_1]$= kg/s , $[b_2]$= kg/m

Analicemos el caso de un objeto que cae en presencia de aire. Vamos a asumir que la caída se produce dentro del régimen de baja velocidad y para simplificar notaremos $b=b_1$:



En el diagrama esquematizamos las fuerzas actuantes sobre el objeto. La segunda ley de Newton rige la dinámica de este movimiento por lo que $\vec{P} + \overrightarrow{f_a} = m\vec{a}$

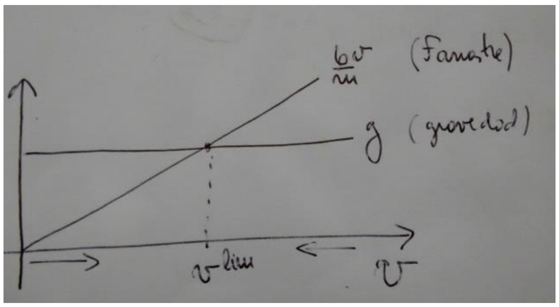
Utilizando el sistema de referencia de la figura vemos que esta ecuación vectorial es trivial para la dirección $\hat{x}$. Por otra parte para la dirección $\hat{y}$ (notar que tomamos la dirección de $\hat{y}$ hacia abajo, de manera que $v_y>0$ para cuerpos que caen) podemos plantear que:

$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \qquad [1]$$

Llegamos entonces, a partir de la ecuación de Newton, a una ecuación que describe la evolución temporal de la velocidad para el movimiento que estudiamos. A partir de ahora, podemos integrarla para encontrar la forma funcional de *v(t)*.

Pero antes de hacer esto analicemos un poco lo que tenemos. La ecuación [1] nos dice que durante la caída la variación de velocidad por unidad de tiempo (miembro izquierdo) resulta de la contribución de dos términos: el primero (*+g*), como es un término positivo, promueve un aumento de la velocidad, mientras que el segundo, (*-b/m v*) , en tanto tome valores negativos la hace disminuir. Lo que ocurra en un determinado instante va a depender del juego entre estos dos términos. Para entender cómo se produce esto analicemos la figura siguiente donde graficamos los dos términos de la ecuación en función de *v*.



$$\frac{dv}{dt} = \overbrace{g}^{aumento} - \overbrace{\frac{b}{m}}^{disminucón} v$$

Mientras que el término de incremento de *v* es constante, el término de disminución de la velocidad debido a la *fuerza de arrastre* es lineal con *v.* En cada instante, la aceleración resulta de la diferencia de altura entre las dos curvas. Notamos que hay un rango de velocidades (bajas velocidades) para el cuál la aceleración es positiva y otro (altas velocidades) para el cual la aceleración es negativa. Además, existente una velocidad especial para la cual ambas tendencias se equilibran y por lo tanto la aceleración del movimiento resulta nula. Llamaremos a ese valor de velocidad: velocidad límite.

$$v_{lim} = \frac{m}{b} g$$

Es interesante notar que si el movimiento comienza con velocidad muy baja ($v_0 < v_{lim}$) la misma se irá incrementando paulatinamente. Mientras que si comienza con una velocidad muy alta ($v_0 > v_{lim}$) la misma irá decreciendo. En ambos casos $v(t) \to v_{lim}$ a medida que pasa el tiempo.

Ahora que tenemos una idea de cómo va a evolucionar el sistema resolvamos matemáticamente la ecuación[1], que involucra a la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v$$

Lo que dice esta ecuación es que una variación infinitesimal de la velocidad *dv* se vincula con la variación infinitesimal de tiempo en el que ocurre *dt* de la siguiente manera

$$dv = \left(g - \frac{b}{m} v\right) dt$$

$$\frac{dv}{\left(g - \frac{b}{m} v\right)} = dt$$

Lo interesante de la última ecuación es que en el miembro derecho aparece todo lo relacionado con *v* y en el izquierdo a cosas que dependen explícitamente del tiempo.

Ahora podemos transformar la ecuación que habla de cambios diferenciales, *dv* y *dt* en una ecuación para *v* y *t*. Para ello vamos a integrar ambos miembros de la igualdad.

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{\left(g - \frac{b}{m} v\right)} = \int_{t_0}^{t} dt \qquad [2]$$

Para poder llevar adelante esta integración es conveniente realizar un cambio de variable, por lo que definimos a la variable *u* como:

$$u = g - \frac{b}{m} v \qquad [3]$$

Notar que como *u* y *v* están vinculados por la expresión anterior sus variaciones también quedan vinculadas.

$$du = -\frac{b}{m}\, dv \qquad [4]$$

Utilizando [3] y [4] en [2] llegamos a

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{-\frac{b}{m} du}{u} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^{t} -\frac{m}{b} dt$$

Ahora sí, integrando resulta

$$\log\left(\frac{u(t)}{u(t_0)}\right) = -\frac{m}{b}(t - t_0)$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{u(t)}{u(t_0)} = e^{-\frac{m}{b}(t - t_0)}$$

$$u(t) = u(t_0) e^{-\frac{m}{b}(t - t_0)}$$

Lo único que resta ahora es expresar ésta última igualdad en términos de *v,* utilizando para ello el cambio de variables dado por [3].

$$u(t) = u(t_0)e^{-\frac{m}{b}(t-t_0)}$$

$$g - \frac{b}{m}v(t) = \left[g - \frac{b}{m}v(t_0)\right]e^{-\frac{m}{b}(t-t_0)}$$

Y despejando *v(t)*

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \left[\frac{mg}{b} - v(t_0)\right]e^{-\frac{m}{b}(t-t_0)}$$

Esta es la ecuación que estábamos buscando. Para analizar lo que significa recordemos que $v_{lim} = mg/b$ por lo que puede escribirse como

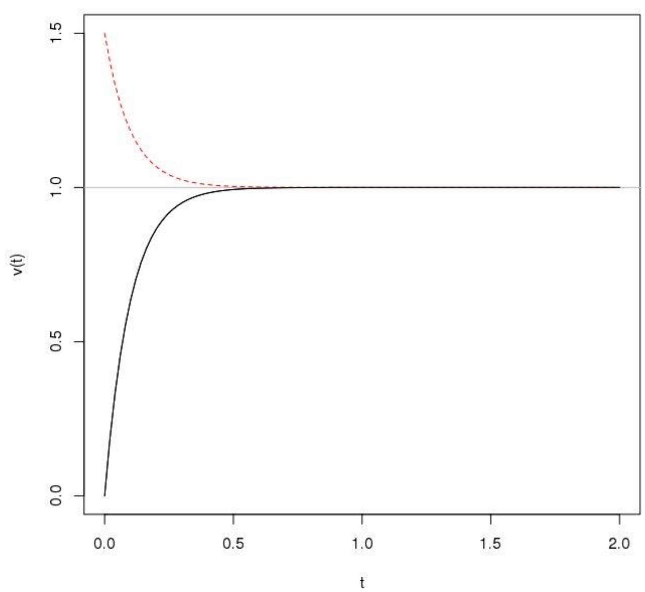
$$v(t) = v_{lim} - [v_{lim} - v(t_0)]e^{-\frac{m}{b}(t-t_0)}$$

Vemos que la dependencia con el tiempo aparece en el segundo término toda vez que la condición de velocidad inicial, *v(t0)*, difiera de v_{lim}. Notamos que en ese caso la desviación respecto a v_{lim} , sin importar su signo, tiende a desaparecer exponencialmente rápido, con una constante de decaimiento: $\tau = b/m$. De esta manera verificamos que, independientemente si la velocidad inicial *v(t0)* sea mayor o menor que v_{lim}, $v(t) \to v_{lim}$.

La siguiente figura muestra el comportamiento de v(t) para dos condiciones iniciales diferentes.

Notar cómo el valor de la velocidad se estabiliza en el mismo valor para ambos casos.

La figura muestra la evolución de v(t), pero si imaginamos las derivadas correspondientes (pendientes a la curva en cada punto) también podremos apreciar de la figura que, a medida que pasa el tiempo las aceleraciones (pendientes) disminuyen en módulo hasta eventualmente anularse, lo que es compatible con el hecho de que, debido a la acción de la fuerza de arrastre, a partir de un determinado tiempo la caída se producirá a velocidad constante



$$v_{lim} = mg/b$$