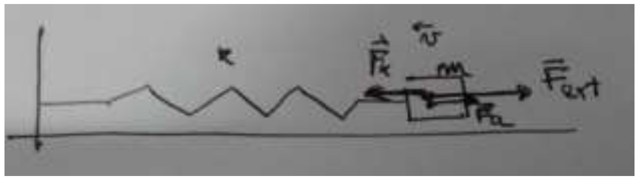
Movimiento Armónico Forzado

Estudiemos ahora el movimiento de una masa sometida a una fuerza elástica, en presencia de fuerzas de arrastre y de una fuerza externa que actúa sobre la misma.



Asumiremos que la forma funcional de dicha fuerza (a la que llamaremos *forzado externo* o simplemente *forzado*) es:

$$\vec{F}_{ext}(t) = F_0 \cos \omega t \ \hat{x}$$

Notemos varias cosas:

1. A diferencias de las fuerzas que estuvimos viendo hasta ahora, el forzado depende *explícitamente* del tiempo. (piénsenlo: la fuerza peso era constante, la elástica dependía cuadráticamente del apartamiento de la posición de equilibrio –i.e. dependía de la posición del objeto, la gravitatoria de la inversa de la distancia –posición nuevamente , la de arrastre de la velocidad, etc…)
2. En principio, la dependencia funcional elegida –i.e. un coseno - parece poco general y arbitraria. Sucede que este no es el caso ya que existe una herramienta matemática llamada análisis de Fourier, que plantea que cualquier función del tiempo puede ser pensada como una combinación particular de senos y cosenos, con frecuencias y desfasajes determinados. Así que aprender cómo resolver el caso de un forzado tipo coseno nos va a abrir las puertas para poder resolver forzados mucho más complicados (no lo vamos a hacer en este curso).

Volvamos al problema. Si no estuviera la fuerza externa sabemos, por lo visto antes, que debido a la existencia de la fuerza de arrastre $\boldsymbol{F_a}$, que se opone en todo momento a la velocidad de la masita y por lo tanto actúa desacelerando al cuerpo, el oscilador evolucionará hasta eventualmente detenerse. Sin embargo veremos que la presencia de una fuerza externa $\boldsymbol{F_{ext}}$ cambia cualitativamente el comportamiento de este sistema. Para entender esto planteemos la ecuación de movimiento que vincula la aceleración de la masita y las fuerzas a las que la misma está sometida:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_a + \vec{F}_k = m\vec{a}$$

Esta es una ecuación vectorial, pero por tratarse de un movimiento unidimensional en lo que sigue plantearemos la ecuación que vincula la componente *x* delas entidades involucradas:

$$F_0 \cos \omega t - bv - kx = ma$$

que, expresando velocidades y aceleraciones como derivadas de la posición respecto al tiempo, puede ser reescrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + {w_0}^2 x = F_0 \cos \omega t$$

donde $\gamma = \frac{b}{m}$ y $w_0 = \sqrt{k/m}$

El miembro izquierdo de la ecuación incluye: un término relacionado con la aceleración (la inercia de la masita), un término relacionado con la fuerza disipativa de arrastre, y uno vinculado con la interacción elástica a la cual está sometida la misma. En la derecha, a su vez, aparece el forzado.

La ecuación planteada es una ecuación de *segundo grado no-homogénea*. Se llama de segundo grado porque la derivada de mayor orden es una derivada segunda respecto al tiempo, y no-homogénea debido a la presencia de un término que depende explícitamente del tiempo.

Nos interesa resolver esta ecuación, es decir encontrar la función *x(t)* que cumple con la misma. Ahora bien, se puede demostrar matemáticamente que la solución general de este tipo de ecuaciones se puede escribir en realidad como combinación de dos funciones que se llaman: solución homogénea y particular respectivamente.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Empecemos por $x_h(t)$: ésta función se llama homogénea porque es en realidad solución del problema homogéneo asociado al que queremos resolver. Esto es, $x_h(t)$ es solución de:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + {w_0}^2 x = 0$$

Pero ya conocemos este problema. Es el de un oscilador en presencia de una fuerza de arrastre disipativa. Sabemos que la masita puede presentar una dinámica de movimiento oscilatorio amortiguado, sobre-amortiguado o críticamente amortiguado, dependiendo de la relación entre γ y w_0. Además, para cualquiera de estas dinámicas sabemos que si esperamos el tiempo suficiente la masita se detendrá en la posición de equilibrio. Es decir, sabemos que para tiempos largos:

$$x_h(t \gg 1) \to 0$$

Esto significa que para tiempos largos, cuando el aporte a la solución completa de la parte homogénea puede despreciarse, la solución del problema con forzado resulta:

$$x(t) = x_p(t)$$

Para estimar la solución particular $x_p(t)$ lo que vamos a hacer es proponer una dada forma funcional y verificar que efectivamente es solución de la ecuación de movimiento. Así, propongamos que

$$x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

y evaluemos si es posible que cumpla con la ecuación de movimiento del problema (recordemos que debe hacerlo, ya que como vimos, a tiempos largos $x_p(t)$, es la expresión que refleja la dinámica física de la masita).

Antes de empezar repasemos lo que estamos proponiendo como solución. Estamos diciendo que a tiempos largos la masita oscilará periódicamente, **con una frecuencia que es la del forzado**, con una amplitud A (que tenemos que determinar), y una fase inicial δ (que también tenemos que determinar). Notemos que esta última representa un eventual desfasaje que puede ocurrir entre el forzado (va como $\cos(\omega t)$) y la posición (va como $\cos(\omega t - \delta)$). Ahora sí verifiquemos si una expresión como la que proponemos es solución de la ecuación de movimiento de nuestro sistema.

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + \gamma\frac{dx_p}{dt} + {w_0}^2 x_p = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t - \delta) - \gamma\,\omega A\sin(\omega t - \delta) + {\omega_0}^2 A\cos(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\underbrace{-\gamma\,\omega A}_{\beta}\sin(\omega t - \delta) + \underbrace{({\omega_0}^2 - \omega^2)A}_{\alpha}\cos(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Entonces tenemos que para que la forma propuesta para $x_p(t)$ sea efectivamente solución los parámetros A y δ no pueden ser arbitrarios sino que deben ser tales que se satisfaga la última ecuación.

Para simplificar la notación en lo que sigue introduzcamos las variables α y β (notemos que la amplitud A de la solución está incluida en las mismas, así que sigue, en el fondo, siendo una ecuación que debe satisfacer A y δ):

$$\alpha\cos(\omega t - \delta) + \beta\sin(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Para continuar recordemos un par de propiedades de los senos y cosenos:

$$\cos(\, a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \qquad \text{y} \qquad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

Por lo tanto

$$\alpha[\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta] - \ \beta[\sin \omega t \cos \delta \pm \cos \omega t \sin \delta] = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

y, finalmente, agrupando términos de cosenos y senos, la ecuación que deben satisfacer A y δ para que $x_p(t)$ sea solución resulta:

$$\left(\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta - \frac{F_0}{m}\right) \cos \omega t + (\alpha \sin \delta - \beta \cos \delta) \sin \omega t = 0$$

Ahora bien. Esta ecuación debe cumplirse para todo tiempo *t*. Si pensamos un poco nos damos cuenta de que para que ello ocurra no queda otra alternativa de que, por separado, la expresión que aparece como factor del coseno por un lado y del seno por otro se anulen. (Piensen en un gráfico donde incluyan a una función $\mathrm{A} \cos \omega t$ y otra $\mathrm{B} \sin \omega t$ y convénzanse de que no hay forma de que la suma de ambas funciones se anule, para todo tiempo t, si A y B son distintos de cero)

Por lo tanto llegamos a establecer que para que $x_p(t) = A \cos(\, \omega t - \delta)$ sea solución deben satisfacerse el siguiente par de ecuaciones:

$$\alpha \sin \delta - \beta \cos \delta = 0$$

$$\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta - \frac{F_0}{m} = 0$$

Disponemos así de dos ecuaciones para fijar los valores de los dos parámetros de la solución particular, A y δ , en función de los demás parámetros del problema (F_o, m, w_0,w,k,γ). Con esto lograríamos nuestro objetivo de mostrar que la forma que propusimos es efectivamente solución

Veamos entonces. La primera de estas dos ecuaciones implica que

$$\alpha \sin \delta = \beta \cos \delta$$

$$\frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Por lo tanto, escribiendo α y β en términos de las variables del problema llegamos a que δ debe cumplir que :

$$\tan\delta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma\omega}{({\omega_0}^2 - \omega^2)}$$

La segunda de las ecuaciones incluye senos y cosenos de δ. Ahora bien lo que acabamos de encontrar es que: $\tan\delta = \frac{\beta}{\alpha}$. Como se muestra la figura esto implica que:

$$\sin\delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Con esto podemos trabajar la segunda ecuación y encontrar que:

$$\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta - \frac{F_0}{m} = 0$$

$$\alpha\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \beta\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{F_0}{m} = 0$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{F_0}{m}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{F_0}{m}$$

Recordando la definición de los coeficientes α y β en función de los parámetros del problema resulta finalmente que:

$$\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 A^2 + (\gamma\,\omega)^2 A^2} = \frac{F_0}{m}$$

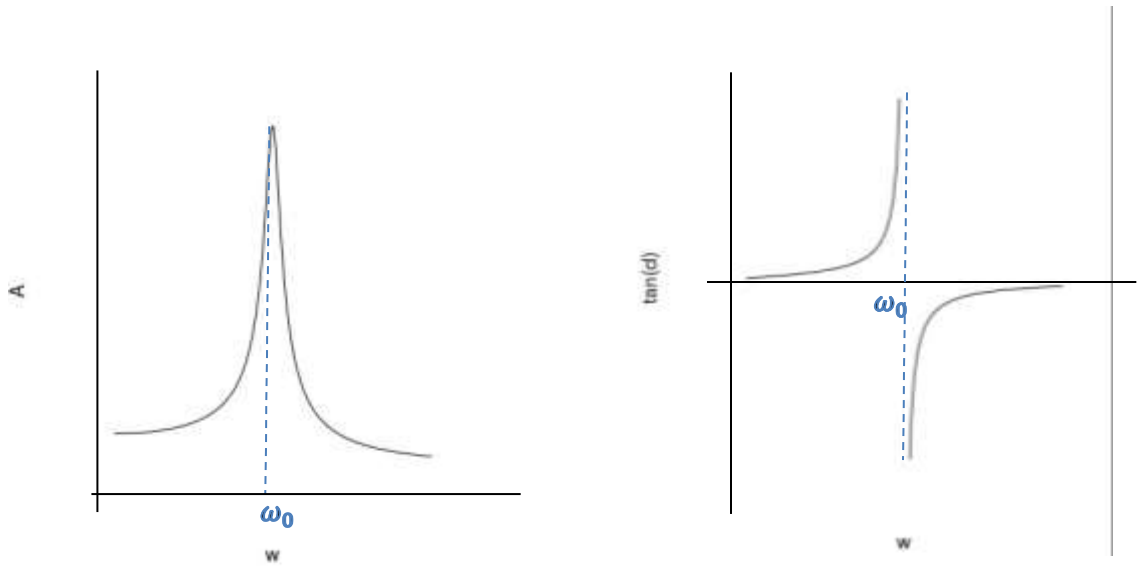
$$A\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\,\omega)^2} = \frac{F_0}{m}$$

que es una ecuación para A.

Escribimos entonces las dos ecuaciones que encontramos que deben satisfacer A y δ para que $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$ sea solución:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\,\omega)^2}} \qquad\qquad \tan\delta = \frac{\gamma\omega}{({\omega_0}^2 - \omega^2)}$$

La siguiente figura muestra la forma cualitativa de cómo dependen estos parámetros de la frecuencia del forzado.



Es notorio que para determinadas frecuencias de forzado, cercanas a la frecuencia natural del oscilador, la amplitud de oscilación crece y toma un valor máximo cuando $\omega = \omega_0$. Se dice que en esa condición el oscilador entra en resonancia con el forzado. Cuando la frecuencia del forzado se aleja de ω_0 el acoplamiento con la fuerza externa se *descordina*. El ritmo con el cual la fuerza externa es aplicada se aleja del ritmo natural del oscilador y las oscilaciones producidas presentan una amplitud mucho menor. También es posible ver que la $\tan\delta$ diverge cuando $\omega = \omega_0$ lo que indica que en ese caso $\delta = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, en resonancia, x(t) y F(t) están en cuadratura, es decir: desfasadas en $\frac{\pi}{2}$