Guia 3 FyB - Números Complejos - Cátedra G.Mindlin

2do Cuatrimestre 2017

Para resolver un conjunto de ecuaciones que no era posible con los reales, como ser $x^2 = -1$, surgió la necesidad de ampliar los números a una clase más allá de los reales. Se define entonces como unidad imaginaria a aquel número que es la solución de ecuación antes planteada y se llama i. Por lo tanto la definición de i es que su cuadrado vale -1. [notar que por definición i puede ser también $-i$].
El numero complejo es aquel que combina una cantidad real a sumado a una cantidad imaginaria b, es decir $a + ib$ y esta clase de números tiene reglas operatorias como toda clase numérica.

Álgeblra de complejos:

1. **Suma (resta)** Sean los números complejos $z = a+ib$ y $w = c+id$, la suma (resta) es: la suma (resta) de la parte real con la parte real y de la parte imaginaria con la parte imaginaria: $z+w = (a+c)+(b+d)i$
   (a) $(3 + 5i) + (2 - 3i)$
   (b) $(3 + 5i) + 6$
   (c) $7i - (4 + 5i)$
2. **Multiplicación** Sean los números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$, el producto de dos números complejos se define como: $z*w = (a+ib)*(c+id) = ac+a(id)+(ib)c+(ib)(id) = (ac-bd)+(ad+bc)i$ [recuerde que por definición $i^2 = -1$]
   (a) $3(2 + 4i)$
   (b) $(5 + 3i)i$
   (c) $(2 - 7i)(3 + 4i)$
3. Lleve a su mínima expresión (i.e. $a + ib$):
   (a) $(2 + 6i) + (9 - 2i)$
   (b) $3(7 - 3i) + i(2 + 2i)$
   (c) i^3
   (d) $(1 - i)^3$
   (e) $(1 + i)^2 + (1 - i)^2$
4. **Complejo conjugado y División** El complejo conjugado de un número complejo se obtiene cambiando la parte imaginaria, por lo tanto si $z = a + ib$, su complejo conjugado es $z^* = a - ib$ (a veces también se lo nota como $\overline{z}$). La forma de dividir por números complejos es usando el complejo conjugado, para eliminar la parte imaginaria del denominador: $\frac{z}{w} = \frac{z}{w} * \frac{w^*}{w^*}$
5. Dado z y w números complejos y z^* y w^* sus respectivos complejos conjugados, demuestre que:
   (a) zz^* es un número real.
   (b) $(z + w)^* = z^* + w^*$
   (c) $(zw)^* = z^*w^*$
   (d) $(z/w)^* = z^*/w^*$
   (e) $Re(z) = 1/2(z + z^*)$

(f) $Im(z) = 1/(2i)(z - z^*)$

6. Lleve a su mínima expresión:
   (a) $\frac{4}{i}$
   (b) $\frac{1-i}{1+i}$
   (c) $\frac{4+5i}{6-5i}$
   (d) $\frac{4i}{(1+2i)^2}$

7. **Ecuaciones algebraicas** Las ecuaciones con números complejos se resuelven al igual que las ecuaciones con números reales despejando en este caso z. O bien se puede descomponer en parte real y parte imaginaria y resolver por separado dos ecuaciones con números reales y luego formar el número complejo $z = x + iy$. Encuentre el valor de $z = x + iy$ para las siguientes ecuaciones
   (a) $4 + 5i = z - (1 - i)$
   (b) $(1 + 2i)z = 2 + 5i$
   (c) $3 + 5i + x - yi = 6 - 2i$
   (d) $x^2 + 9 = 0$
   (e) $x^2 + 2x + 2 = 0$

8. **Representación Polar de un complejo** Un número complejo $z = a + ib$ se puede representar como un punto en el plano complejo usando los los ejes cartesianos xy, donde x representa el eje real e y representa el eje imaginario. Ese punto en coordenadas cartesianas se escribe como $x = a$ e $y = b$, sin embargo todo punto del plano puede tener una representación en coordenadas polares $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$, donde r, es el módulo del complejo z y θ es el ángulo determinado entre el semieje positivo de x y el segmento que une el origen con el punto que representa el complejo ($\theta = arg(z) = tan^{-1}(Im(z)/Re(z))$ entre $-\pi$ y π). [notar que por lo tanto $a = rcos(\theta)$ y $b = rsin(\theta)$]

9. Escriba los siguientes números en polares en la otra representación (i.e pasar de cartesianas a polares y viceversa)
   (a) $7 + 2i$
   (b) $3 - i$
   (c) $-4 + 6i$
   (d) $r = 3, \theta = \pi/4$
   (e) $r = 5, \theta = \pi$
   (f) $r = 6, \theta = 4\pi/3$

10. **Fórmula de Euler** Una notación muy usada es la fórmula de Euler, que relaciona las potencias imaginarias con los comportamientos de senos y cosenos en el plano complejo:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta) \tag{1}$$

    Una consecuencia directa de dicha relación es que la expresión de un número complejo en polares se puede compactar de la siguiente manera: $z = re^{i\theta}$

11. Demuestre la fórmula de Euler, para ello desarrolle en series de Taylor la exponencial, el seno y el coseno y compruebe la igualdad.

12. **Algebra de complejos usando la fórmula de Euler** Usando la notación de Euler debido los beneficios del álgebra de las funciones exponenciales varias de las operaciones con complejos resultan muy simplificadas. Sean $z = re^{i\theta}$ y $w = se^{i\alpha}$ encuentre expresiones para:
    (a) z^*
    (b) zw
    (c) z/w
    (d) zz^*
    (e) La ecuación de Euler es famosa por relacionar 5 números "famosos" $0, 1, \pi, i$ y e. Encuéntrela