Guia1 FyB - Flujos en la línea - Cátedra G.Mindlin

2do Cuatrimestre 2017

1. Analice las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden gráficamente. Primero grafique el campo vector. Luego encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de la trayectoria ($x(t)$) para distintas condiciones iniciales. Grafique alguna de estas trayectorias en el espacio de fases (i.e. el retrato de fases). Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada. Compruebe que las soluciones posibles para estos sistemas son de forma similar: o se aproximan a un valor o se alejan del mismo.
   (a) $\dot{x} = ax$ (sistema lineal en 1D, note el conjunto de soluciones acotada que presenta este sistema)
   (b) $\dot{x} = 4x^2 - 16$
   (c) $\dot{x} = x - x^3$
   (d) $\dot{x} = 1 + 0.5\cos x$
   (e) $\dot{x} = e^x - \cos x$ (truco: grafique e^x y $\cos x$ en el mismo gráfico y busque las intersecciones. No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)
   (f) $\dot{x} = 1 - 2\cos x$
2. Encuentre una ecuación $\dot{x} = f(x)$ cuya solución es consistente con el gráfico siguiente:

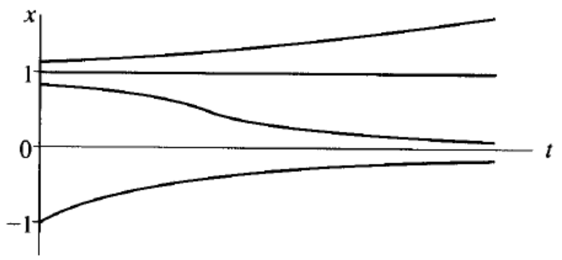

Figure 1: Problema 2

Algunas aplicaciones:

3. (Ecuación Logística) Resuelva la ecuación logística $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ para una condición inicial arbitraria N_0. truco: use un cambio de variables $x = 1/N$.
4. (Autocatalisis) Considere la siguiente reacción química

$$A + X^{k_1} \rightleftharpoons_{k_{-1}} 2X \tag{1}$$

donde una molécula de X se combina con una de A para formar dos de X. Esto significa que el compuesto X estimula su propia producción, un proceso llamado *autocatálisis*. Esta retroalimentación positiva eventualmente es limitada por la reacción reversa donde 2X se convierte en A+X.

   (a) Usando la ley de acción de masas escriba la ecuación diferencial que gobierna esta reacción.

(b) Encuentre los puntos fijos y clasifique su estabilidad.
(c) Realice un gráfico de $x(t)$ para varias condiciones iniciales X_0.

5. (Ley de Gompertz) El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros. Interprete a y b biológicamente. Dibuje el campo vector y luego grafique $N(t)$ para varias condiciones iniciales.

6. (Efecto Allee) Para ciertas especies de organismos, la tasa de crecimiento efectivo es $\dot{N}/N$ es mayor a valores intermedios de N (efecto Allee). Considere que ese escenario es posible en el caso que si N es muy pequeño, resulta muy difícil conseguir pareja debido a la escasez y si N es muy grande es difícil debido a la competencia.

   (a) Muestre que $\dot{N}/N = r - a(N-b)^2$ es un ejemplo del efecto de Allee, si r,a y b satisfacen ciertas condiciones. Determinarlas.
   (b) Encuentre los puntos fijos del sistema y clasifique la estabilidad.
   (c) Dibuje las soluciones $N(t)$ para diferentes condiciones iniciales N_0
   (d) Compare con la solución $N(t)$ que encontó para la ecuación logística. Cuáles son cualitativamente las diferencias?

Estabilidad lineal:

7. Use estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si la estabilidad lineal falla porque $f'(x^*) = 0$, use un argumento gráfico para demostrar estabilidad.

   (a) $\dot{x} = x(1-x)$
   (b) $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$
   (c) $\dot{x} = \tan x$
   (d) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$
   (e) $\dot{x} = ax - x^3$, donde a puede ser positivo, cero, o negativo. Discuta todos los casos.
   (f) $\dot{x} = x^2(6-x)$
   (g) $\dot{x} = \ln x$

8. Usando estabilidad lineal, clasifique todos los puntos fijos del modelo de Gompertz de crecimiento de tumores $\dot{N} = -aN\ln(bN)$.

Imposibilidad de Oscilar en 1D:

9. Considere un resorte sin masa de constante elástica k fijo en unos sus extremos y en el otro tiene una bolita de masa m enganchada. El conjunto resorte-masa se puede mover en una recta (suponga el eje x). Este sistema se lo conoce como el oscilador armónico.

   (a) Usando la ley de Newton escriba la ecuación que determina el movimiento de dicha masa.
   (b) Explique la paradoja que surge al saber que el oscilador debe oscilar, pero sin embargo se dijo que no se permiten las oscilaciones en los flujos en la línea.
   (c) Note que la ecuación resultante no es estrictamente como las que se han trabajo, indique cuál es la diferencia?
   (d) Lleve la ecuación obtenida a un sistema de la forma $\dot{x} = f(x)$ y ayúdese para la explicación de la "paradoja".

10. (Opcional) Una prueba analítica para probar que oscilaciones periódicas no son posibles en un campo vector en la línea es la siguiente. Suponga que es posible que $x(t)$ sea una solución periódica del sistema $\dot{x} = f(x)$, por lo tanto $x(t) = x(t+\tau)$ para algún $\tau > 0$ (y $x(t)$ no es constante para todo t). Pruebe que llega a una inconsistencia para la integral $\int_t^{t+\tau} f(x)\frac{dx}{dt}dt$. (truco: resuelvala de dos maneras distintas, por un lado use regla de la cadena y la periodicidad como hipótesis y por el otro use que $\dot{x} = f(x)$).