Guia 2 FyB - Bifurcaciones en 1D - Cátedra G.Mindlin

2do Cuatrimestre 2017

1. **Bifurcación nodo-silla**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación de nodo-silla ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.
   (a) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$
   (b) $\dot{x} = r - \cosh x$
   (c) $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$
   (d) $\dot{x} = r + \frac{x}{2} - \frac{x}{1+x}$
2. **Bifurcación transcrítica**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación transcrítica ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.
   (a) $\dot{x} = rx + x^2$
   (b) $\dot{x} = rx - \ln(1 + x)$
   (c) $\dot{x} = x - rx(1 - x)$
   (d) $\dot{x} = x(r - e^x)$
3. **Bifurcación pitchfork**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación pitchfork ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.
   (a) $\dot{x} = rx + 4x^3$
   (b) $\dot{x} = rx - \sinh x$
   (c) $\dot{x} = rx - 4x^3$
   (d) $\dot{x} = x + \frac{rx}{1+x^2}$
4. Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga que tipo es (incluyendo si corresponde a si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.
   (a) $\dot{x} = r - 3x^2$
   (b) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$
   (c) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$
   (d) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$
5. (Transcrítica imperfecta) Considere el sistema $\dot{x} = h + rx - x^2$, donde cuando $h = 0$ el sistema va a una transcrítica como las estudiadas con bifurcación en $r = 0$. Estudie como se modifica el diagrama de bifurcaciones al inlcuir la imperfección h.
   (a) Grafique el diagrama de bifurcaciones $x*$ vs r, para los tres casos: $h < 0$, $h > 0$ y $h = 0$.
   (b) Haga un esquema de las soluciones en el espacio (r, h) identifique las bifurcaciones que ocurren y sus límites.

6. (Pitchfork imperfecta) Considere el sistema $\dot{x} = rx + ax^2 - x^3$, donde $-\infty < a < \infty$. Para $a = 0$ tenemos la forma normal de pitchfork supercrítica. Ahora queremos ver el efecto de perturbar el sistema con un término cuadrático.

   (a) ¿Qué simetría se rompe para $a \neq 0$?

   (b) Para cada a realice un diagrama de bifurcaciones x vs r. A medida que a varía ocurren cambios cualitativos. Encuentre todos los cambios cualitativos que se pueden obtener cambiando a.

   (c) Resuma los resultados anteriores dibujando en un diagrama (r, a) los distintos retratos de fases. Bifurcaciones ocurren en las interfases de estas regiones. Identifiquelas.

Algunas aplicaciones:

7. (Brote epidémico - para hacer en clase!) Un tipo de gusano se alimenta de la hojas de una especie de árbol de un bosque. Cuando el brote epidémico de los gusanos tiene lugar consumen las hojas de los árboles y matan a la mayoría de éstos en el plazo de algunos años. Luwdwing et al (1978) propusieron un modelo simple para la interacción entre los gusanos y los árboles basándose en las diferentes escalas temporales de ambas poblaciones: los gusanos crecen rápidamente y los árboles mueren lentamente. Por lo tanto para analizar la dinámica de los gusanos, se puede considerar las variables del bosque como constantes ya que varían poco en la escala rápida. El modelo entonces propuesto para la población de gusanos es:

$$\dot{N} = RN(1 - \frac{N}{K}) - p(N) \tag{1}$$

donde N es la población de gusanos que en ausencia de predadores ($p(N)$) se tiene un crecimiento determinado por la ecuación logística, siendo entonces K la capacidad de carga de la especie (depende de las hojas de los árboles y se considerará constante) y R la tasa de crecimiento. A su vez, $p(N)$ representa el decrecimiento de la población de gusanos dada por la predación por parte de aves que a su vez depende de la población de gusanos:

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2} \tag{2}$$

con A y B positivos.

   (a) Explique como se comporta el término de depredación según los niveles de población de gusanos.

   (b) Adimensionalice la ecuación diferencial usando los parámetros del sistema, i.e lleve el sistema a variables sin dimensión, para ello típicamente se hacen cambios de variables entre los parámetros de forma de cancelar la dimensionalidad. En este caso aplique el siguiente $x = N/A$, $\tau = Bt/A$, $r = RA/B$ y $k = K/A$ y obtenga la ecuación:

$$\frac{dx}{d\tau} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{x^2}{1 + x^2} \tag{3}$$

   (c) Encuentre los puntos fijos del sistema y analice su estabilidad gráficamente.

   (d) Realice un diagrama de bifurcaciones según los parámetros r y k.

   (e) Estudiar las soluciones para los distintos valores de los parámetros dar interpretaciones biológicas de las mismas.

8. (Modelo simple de pescador) La ecuación $\dot{N} = RN(1 - \frac{N}{K}) - H$ es un modelo super simplificado del pescador. Note que en ausencia de pescadores el crecimiento está determinado por la ecuación logística, mientras que el efecto del pescador está representado por $-H$, con $H > 0$, que es independiente de la población de peces.

   (a) Encuentre que el sistema se puede escribir de forma adimensional como (ayúdese con el ejercicio anterior):

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - h \tag{4}$$

(b) Grafique el campo vector para distintos valores de h.

(c) Encuentre que para cierto valor de $h = h_c$ sucede una bifurcación y clasifíquela.

(d) Describa el comportamiento a largo plazo de la población de peces para $h < h_c$ y para $h > h_c$ y de interpretaciones biológicas de esto. Que crítica le podría hacer a este modelo por el que carece de sentido biológico?? Qué es lo que le falta entonces dinámicamente???

9. (autocatálisis II)Considere la siguiente reacción química:

$$A + X^{k_1}\rightleftharpoons_{k_{-1}} 2X \qquad X + B^{k_2}\rightarrow C \tag{5}$$

Suponiendo que tanto A como B se mantienen a concentración constantes a y b, muestre que la ley de acción de masas nos lleva a la ecuación $\dot{x} = c_1 x - c_2 x^2$, donde x es la concentración de X, y c_1y c_2 son constantes a determinar. Muestre que $x^* = 0$ es estable cuando $k_2 b > k_1 a$, y explique porque es químicamente aceptable esta relación.

10. (Switch bioquímico) Las bandas de las cebras y los patrones de las mariposas con dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el surgimiento de dichos patrones es un problema abierto en la biología.

Como uno de los ingredientes necesarios para el surgimiento de dichos patrones, Lewis (1979) consideró un ejemplo sencillo de switch bioquímico, donde un gen G se activa por una señal bioquímica S. Por ejemplo, el gen está normalmente desactivado, pero se puede 'prender' para producir un pigmento, u otro producto de los genes cuando la concentración de S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2} \tag{6}$$

donde $k_j > 0$ son constantes de reacción. La producción de g es estimulada por s_0 al ritmo k_1, y por una retroalimentación *autocatalitica* o positiva (los términos nolineales). Hay también un término de degradación controlado por k_2.

Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2} \tag{7}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales. Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado. Asuma que inicialmente no hay ningun producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activante se 'prende'); qué pasa con $g(t)$? Qué pasa si s vuelve a caer a cero? El producto se 'apaga' nuevamente? Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren. (hint: vea el Murray (1989) capitulo 15).

11. (Epidemias) En un trabajo pionero Kermack y McKendrick (1927) propusieron un modelo sencillo para la evolución de las epidemias. Suponga que la población puede dividirse en 3 tipos: $x(t)$ =número de individuos sanos; $y(t)$ =número de individuos infectados; $z(t)$ =número de individuos muertos. Asuma que el total de la población permanece constante, excepto por las muertes de la epidemia. El modelo es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly \end{aligned} \tag{8}$$

donde k y l son constantes positivas. El modelo se basa en

- Los individuos sanos se enferman a un ritmo proporcional al producto de x e y,
- Los enfermos mueren a una tasa l.

El objetivo del ejercicio es reducir este sistema de tercer orden a uno de primer.

(a) Muestre que $x + y + z = N$, donde N es constante.

(b) Use las ecuaciones de $\dot{x}$ y $\dot{z}$ para mostrar que $x(t) = x_0 \exp(-kz(t))/l$, donde $x_0 = x(0)$.

(c) Muestre que z satisface la ecuación de primer orden $\dot{z} = l(N - z - x_0 \exp(-kz/l))$.

(d) Muestre que la ecuación anterior se puede adimensionalizar a

$$\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u} \tag{9}$$

(e) Muestre que $a \geq 1$ y $b > 0$.

(f) Determine el número de puntos fijos y clasifíquelos.

(g) Muestre que el máximo de $\dot{u}(t)$ ocurre justo en el mismo momento que el máximo de $\dot{z}(t)$ y $y(t)$. Este tiempo se conoce como el *pico de la epidemia*, y denotado t_{pico}.

(h) Muestre que si $b < 1$ entonces $\dot{u}(t)$ está aumentando en $t = 0$ y llega a un máximo en t_{pico}. Muestre que $\dot{u}(t)$ eventualmente tiende a cero. En cambio si $b > 1$, $t_{pico} = 0$, y no ocurre la epidemia.

(i) Esta condición se conoce como el umbral de la epidemia. Puede obtener una interpretación biológica de la misma?

(j) Kermack y McKendrick mostraron que su modelo daba un buen ajuste a los datos de la plaga de Bombay 1906. Como lo mejoraría para hacerlo más apropiado para el SIDA? Que suposiciones revisaría?