Guia 4 FyB - Oscilaciones - Cátedra G.Mindlin

2do Cuatrimestre 2017

Oscilador Armónico

1. (teórico/práctico) El oscilador armónico en una dimensión, como se ha visto en la guía 1, presenta soluciones oscilatorias gracias a que la ecuación de Newton, usada para describir el sistema, es una ecuación diferencial de órden dos (involucra a la aceleración como derivada segunda de la posición). Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad con \quad \omega_0^2 = k/m \tag{1}$$

   Una forma astuta de encontrar las soluciones de esta ecuación diferencial es usando exponenciales complejas que como hemos visto están íntimamente relacionadas con las oscilaciones. [nota: hay que estar bien alerta pues sabemos que las soluciones del sistema deben ser funciones reales y no complejas, por lo que trabajar con estas exponenciales es de mucha utilidad pero al final debemos tomar la parte real de la solución.]

   (a) Proponga como solución $x(t) = Ae^{i\alpha t}$ y pruebe que α puede tomar más de un valor. Encuentre cuáles son.

   (b) La solución general del sistema es la suma de las dos soluciones posibles para cada valor de α: $x(t) = Ae^{i\alpha_1 t} + Be^{i\alpha_2 t}$, con A y B constantes complejas. Tome la parte real de dicha solución y escriba la solución del problema físico del oscilador armónico. [ayuda: Escriba ambas constantes complejas como su parte real más su parte imaginaria y desarrolle las exponenciales, haga las distributivas y agrupe por un lado todo lo que esté multiplicado por i y por otro todo lo que no lo esté. Luego quédese sólo con la parte real].

   (c) Pruebe que puede escrirbir la solución real del sistema como $x(t) = Ccos(\omega_0 t + \theta)$.

   (d) Para determinar las dos constantes de integración que están presentes en la solución (note que en todos los casos fuimos"arrastrando" dos constantes: en un primer momento A y B y finalmente C y θ) se necesita conocer las condiciones iniciales del sistema, es decir, cuando empezó el movimiento, en qué posición estaba y con qué velocidad empezó. Matemáticamente eso se traduce en cuál es el valor de la función $x(t)$ cuando $t = 0$ y cuál es del valor de $\dot{x}(t)$ cuando $t = 0$. Encuentre el valor de las constantes de integración cuando $x(t = 0) = x_0$ y $v(t) = \dot{x} = 0$ y escriba la solución completa del sistema para esas condiciones iniciales.

2. Un cuerpo está apoyado sobre una mesa, unido a un resorte de constante $k = 500\ N/m$ y largo natural 10 cm (el otro extremo del resorte está fijo a la pared). Si el cuerpo se desplaza una distancia 2 cm de su posición de equilibrio, comprimiendo al resorte, y se lo suelta, oscila con un período de $0.63s$.

   (a) Haga el diagrama de cuerpo libre y halle la ecuación del movimiento a partir de la 2ª Ley de Newton.

   (b) Determine el valor de la masa en función de los datos.

   (c) Escriba las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

   Nota: recuerde que $T = \frac{1}{f}$ y $\omega = 2\pi f$

3. La frecuencia con la que oscila un cuerpo unido al extremo de un resorte es 5 Hz ¿Cuál es la aceleración del cuerpo cuando el desplazamiento es 15 cm?

4. Para estirar 5 cm un resorte horizontal es necesario aplicarle una fuerza de 40 N. Uno de los extremos de este resorte está fijo a una pared mientras que en el otro hay un cuerpo de 2 kg. La masa del resorte es despreciable. Si se estira el resorte 10 cm a partir de su posición de equilibrio y se lo suelta:

   (a) Cuál es la amplitud y la frecuencia del movimiento? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer una oscilación completa?

   (b) Obtenga la expresión de posición en función del tiempo y grafíquela señalando la posición de equilibrio.

   (c) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración al cabo de 0.2 seg. Describa cualitativamente en que etapa del movimiento oscilatorio está.

5. Un cuerpo de masa 800 g está suspendido de un resorte de longitud natural 15 cm y constante elástica K=320 N/m, que se encuentra colgado del techo.

   (a) Halle la posición de equilibrio.

   (b) Si se desplaza al cuerpo 1.5 cm hacia abajo a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle su posición en función del tiempo.

6. Usando los órganos sensoriales del sus patas, las arañas detectan las vibraciones de sus telas cuando una presa queda atrapada.

   (a) Si al quedar atrapado un insecto de 1 gr la tela vibra a 15 Hz, ¿cuál es la constante elástica de la tela?

   (b) Cuál seria la frecuencia cuando queda capturado un insecto de 4 gr?

7. (teórico/práctico) (El oscilador armónico: espacio de fases) Considere oscilador armónico unidimensional de masa m y constante elástica k y retome la ecuación de Newton que escribió en el problema 9 de la guía 1.

   (a) Llévelo a la forma de sistema dinámico de dos ecuaciones de órden 1 y escríbalo en forma matricial como como $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

   (b) Realice el retrato de fase para la condición inicial $(0, -\omega x_0)$ y describa el flujo resultante.

   (c) Encuentre el punto fijo y caracterícelo.

   (d) Encuentre la solución del sistema para esas condiciones iniciales.

8. Un cuerpo de masa m está unido a resortes de constante k_1 y k_2 como se indica en cada uno de los siguientes casos. Demuestre que las mismas situaciones se pueden representar por un único resorte de constante elástica K como muestra la figura. Se puede ver que para N resortes iguales de constante elástica K, su equivalente es $K_{eq} = K/N$ si se colocan en serie, y $K_{eq} = K.N$ si se colocan en paralelo

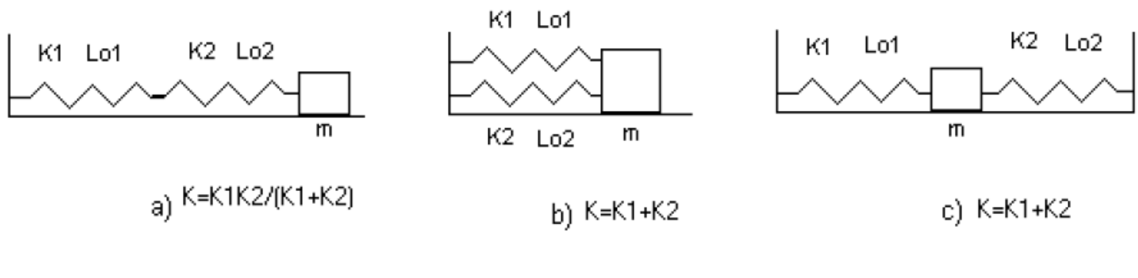

Figure 1: Esquemas con resortes

Oscilador Armortiguado

9. (teórico/práctico) El oscilador amortiguado consiste en el sistema estudiado en los ejercicios anteriores con la diferencia de que en vez de oscilar en el vacío, oscila en un medio que le presenta cierta resistencia. Normalmente dicha resistencia se modela como una fuerza proporcional a la velocidad, opuesta al movimiento y en la misma dirección: $F_r = -b\dot{x}$.

(a) Realice un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas. Muestre que la ecuación que rige el movimiento es $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$ con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $\gamma = b/m$.

(b) Proponga como solución una exponencial compleja de la forma $x(t) = Ae^{i\alpha t}$ y encuentre qué valores debe tomar α.

(c) Escriba la solución completa del oscilador amortiguado como la superposición de ambas soluciones obtenidas para cada valor de α. Recuerde que la solución del problema físico es la parte real de dicha solución compleja!!

(d) Describa las distintas soluciones que tiene el sistema según la relación entre el amortiguamiento (γ) y la frecuencia propia del oscilador (ω_0). [nota: cuando la solución es una oscilación que decae en amplitud se llama movimiento sub amortiguado, cuando no oscila y solo decae se llama sobre amortiguado]

(e) Se define τ como el tiempo en que la amplitud inicial de la oscilación decae al 36.8 % (e^{-1}). Halle una expresión para τ en función de los parámetros del sistema para cada uno de los casos anteriores.

10. Se tiene una esferita de platino de 2.9 cm de diámetro unida a un resorte de constante $k = 0.1\ N/m$. Se comprueba que cuando está sumergida en aceite oscila de manera que su posición en función del tiempo es $x(t) = 5e^{-0.02t}cos(0.6t)$.

    (a) Grafique la posición en función del tiempo. Calcule el valor de τ y el período de la oscilación.

    (b) Calcule la masa de la esferita.

    (c) En las condiciones del problema, la constante de amortiguamiento verifica la ley de Stokes, $\gamma = 6\pi R\mu$, donde R es el radio de la esfera y μ es el coeficiente de viscosidad del medio. Calcule el valor de γ y μ .

11. Un cuerpo de masa $m = 2\ kg$ descansa sobre un tablero horizontal y está unido al extremo libre de un resorte de constante elástica $k = 200\ N/m$. En un instante dado, las oscilaciones presentan una amplitud $A_0 = 30\ cm$; pero debido a un rozamiento de tipo viscoso ($F_r = b\dot{x}$), dicha amplitud se reduce a la mitad cuando han transcurrido $t1 = 25\ s$. Con estos datos, determinar:

    (a) Valor del parámetro de amortiguamiento $\gamma = b/m$, del coeficiente de amortiguamiento b, del tiempo de relajación y del factor de calidad $Q = \omega_0/\gamma$.

    (b) La frecuencia y el periodo de las oscilaciones amortiguadas y no amortiguadas.

12. Las células sensoriales del oído (Hair cells) median la percepción del sonido, la aceleración lineal, angular y la gravedad (sistemas de equilibrio) en vertebrados. Estas células no son mas (ni menos) que resonadores muy bien afinados a las frecuencias de las señales mecánicas que deben detectar, y su posibilidad de reportar al sistema nervioso fielmente estas señales depende críticamente de su capacidad de transformar un input mecánico en una señal eléctrica (una corriente, que es la moneda del SN) que transporte la información sobre la señal externa al cerebro. O sea que estas células deben funcionar como "transformadores" de una señal mecánica en una señal eléctrica. Para poder hacerlo cuentan con una estructura (estereocilias) que es capaz de oscilar en respuesta a una señal mecánica. Como estas estructuras elásticas oscilan en un medio viscoso, podemos modelarlas como una masa M acoplada a un oscilador de constante K moviendose en un medio viscoso con disipación lineal γ. O sea, estas células no son más que osciladores amortiguados.
    Construyendo un Detector de movimiento: Suponga que las estereocilias reciben una señal sonora durante una cantidad de tiempo acotada y en respuesta a ello quedan oscilando en torno a una posición de equilibrio. Cada vez que en la estructura se produce un desplazamiento igual o mayor a 10 nanómetros (solo en el sentido positivo), como consecuencia se abre un canal que deja entrar corriente a la célula. Se quiere medir la corriente que entra indirectamente con un dispositivo óptico que cuenta la cantidad de veces que el sistema se desplaza al menos 10 nanómetros, según el siguiente diagrama: Determine para las siguientes condiciones: $K = 1\ mN/m$ ($1.10^{-3}N/m$), masa $M = 10^{-13}\ kg$ en un medio con $\gamma = 0.001\ mN.s/m$ ($1.10^{-9}N.s/m$)

    (a) cuál es la frecuencia (f) de la oscilación?

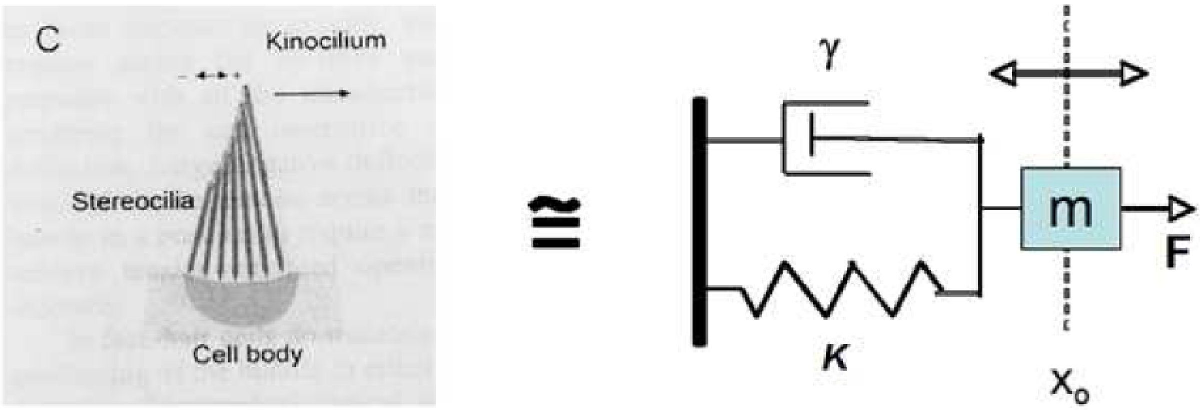

Figure 2: Modelo de esteocilias

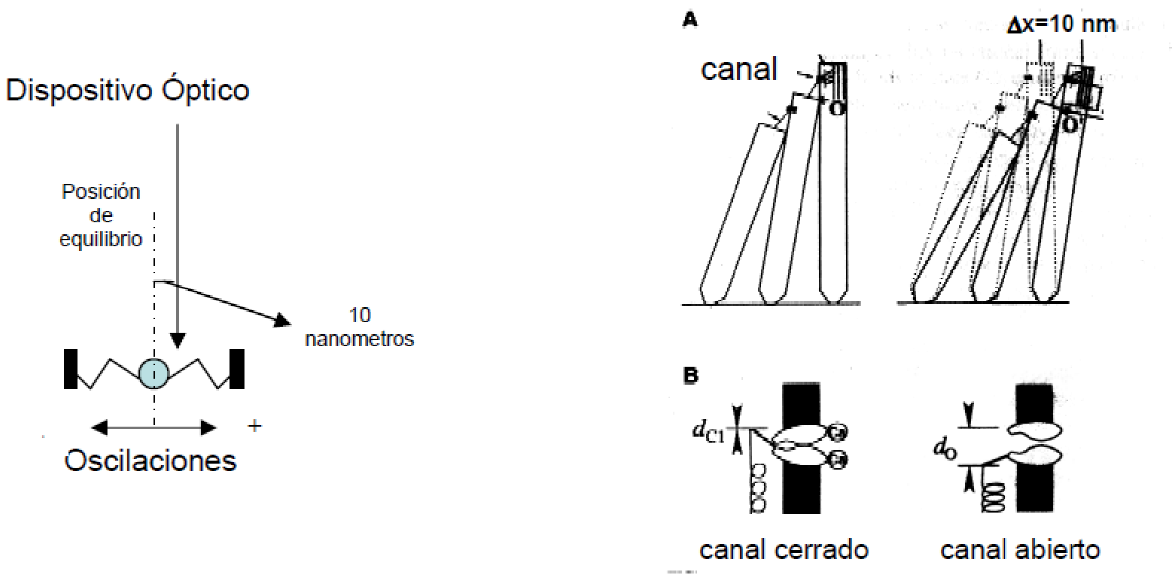

Figure 3: Esquemas de detección del movimiento de la esterocilia

(b) el movimiento será sub o sobre amortiguado? Cual es su t ?

(c) Si el desplazamiento tiene una amplitud inicial de 50 nm ($X_0 = 50nm, v_0 = 0$) cuántas veces la estereocilia cruza el detector? Cuántas veces se habrá abierto el canal?

Péndulo Simple

13. Escriba la ecuación diferencial para pequeñas oscilaciones de un péndulo. Demuestre que su período de oscilación es $T = 2\pi\sqrt{g/L}$, donde L es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

14. (Péndulo Simple) Considere un péndulo de masa m y longitud L capaz de moverse sobre un plano vertical como muestra la figura.

    (a) Escriba la ecuación de Newton que describe el movimiento de la coordenada θ.

    (b) Adimensionalice el sistema considerando $\omega = \sqrt{g/L}$ y $\tau = t\omega$ y obtenga $\ddot{\theta} + sin\theta = 0$

    (c) Escriba la ecuación como dos ecuaciones de primer orden. Analice los puntos fijos y linealice en torno al (0,0) y (π,0) y realice un diagrama de fases.

    (d) Explique qué pasa en el diagrama de fases para θ pequeño y compare con el obtenido para el caso del oscilador armónico.

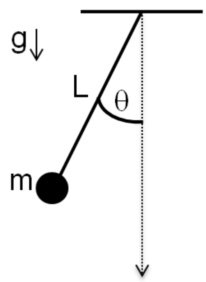

Figure 4: Péndulo simple, problema 13

15. La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de $T = 3.00$ segundos en un lugar en donde $g = 9,803$ m/s y un período de $T = 3.0024$ segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de g este último lugar?

16. Un péndulo simple de 10 g de masa tiene inicialmente un período de 2 seg y una y amplitud de 2. Luego se lo sumerge en un medio con rozamiento y después de dos oscilaciones completas la amplitud se reduce a $1,5$ Encuentre la constante de amortiguamiento r.

Oscilador Forzado: resonancia

17. (teórico/práctico) Considere el oscilador amortiguado de los ejercicios anteriores forzado periódicamente, es decir con una función de la forma $F(t) = F_0cos(\omega t + \Delta)$, donde ω es la frecuencia del forzado y Δ la fase. La ecuación de dicho sistema es entonces:

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \tag{2}$$

    (a) Considerando que conoce el comportamiento del oscilador amortiguado, explique cualitativamente como será el comportamiento del oscilador forzado. Cómo será el movimiento en tiempos largos?

    (b) Como hemos vistos una buena estrategia para encontrar las soluciones de estos sistemas oscilantes es usar las exponenciales complejas. Note que en este caso entonces también deber representar al forzante con una exponencial compleja, $F(t) = \hat{F_0}e^{i\omega t}$, donde $\hat{F_0}$ es un número complejo que incluye la fase ($\hat{F_0} = F_0e^{i\Delta}$). Demuestre que el sistema tiene una solución transitoria (la del oscilador amortiguado, que se extingue con el tiempo) y la solución estacionaria que es la solución forzada. [para ello proponga como solución particular que el sistema oscila a la frecuencia del forzante ($x(t) = \hat{x}e^{i\omega t}$, con $\hat{x}$ complejo y por lo tanto tiene una fase incluída)]:

$$x(t) = RF(t), \quad con \quad R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} \tag{3}$$

(c) Escriba la solución real del sistema, recuerde que debe tomar la parte real de la solución compleja, para ello escriba R en su forma polar ($R = \rho e^{i\theta}$, con $\rho = |R|$). Compruebe entonces que el movimiento resultante tiene una amplitud que depende del valor del amortiguamiento y de la relación entre la frecuencia propia del oscilador y a la que se lo fuerza. N

(d) Estudie como varia ρ^2 en función de ω, notar que cuando $\omega = \omega_0$ se hace máximo. Esto se conoce como resonancia ya que el moviemiento resultante tiene su máxima amplitud y es un fenómeno muy relevante. Qué pasa con la fase? Graficar ambas cosas en función de ω

18. (teórico/práctico) En un oscilador forzado, por lo general, las frecuencias de mayor interés a analizar son aquellas que se encuentran cercanas a la resonancia. Demuestre:

   (a) la expresión para el factor de amplificación ρ de la oscilación forzada amortiguada cuando se lo fuerza cerca de la resonancia ($\omega \approx \omega_0$) y con disipación baja ($\gamma << \omega_0$) es:

$$\rho^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_o - \omega)^2 + \gamma^2/4]} \tag{4}$$

   [ayuda: aproxime $(\omega^2 - \omega_0^2)$ de la expresión exacta de ρ^2 por $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$, entienda por qué se puede hacer esa aproximación, sino pregunte!!!].

   (b) Demuestre que el ancho la campana de resonancia ($\Delta\omega$) a la altura de la mitad del pico máximo de la curva es $\Delta\omega = \gamma$. [ayuda: encontrar el valor de $\rho^2(\omega = \omega_0)$, i.e en la resonancia, y luego hallar los valores de ω que cumplan con $\rho^2_{max}/2$]

19. Una partícula de $m = 5\ kg$ se encuentra unida a un resorte de constante elástica $k = 80\ N/m$, sin disipación, y es forzado externamente a oscilar por una fuerza $F(t) = 0.2\omega cos(\omega t)$.

   (a) Escriba la ecuación del Newton del sistema. Encuentre la solución $x(t)$ discriminando claramente entre la solución homogénea y la particular.

   (b) Note que al no tener disipación la solución homogénea no decae con el tiempo. Entonces encuentre las condiciones iniciales necesarias para anular dicha solución.

   (c) Encuentre en esa condición para que valores de la frecuencia del forzante ω obtiene oscilaciones con una amplitud mayor que 0.4 m. Y para obtener oscilaciones con amplitud menor a 0.1 m?

20. Una partícula de masa m está unida al extremo de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0. El otro extremo del resorte está unido a una pared que se mueve de acuerdo a la ley $x_p(t) = Lcos(\omega t)$. La partícula también está sometida a la acción de una fuerza viscosa $F_v = -r\dot{x}\hat{x}$.

   (a) Escriba la ecuación de Newton para la para la partícula. Indique claramente cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella.

   (b) Para el caso $\frac{k}{m} > (\frac{r}{2m})^2$, diga cuál es la solución de la ecuación de movimiento $x(t)$. Para los tiempos largos ($\beta t >> 1$, con $\beta = \frac{r}{2m}$), diga en qué dirección se mueve la partícula cuando la pared se mueve hacia la derecha, si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

21. (Instrumental sísmico: sismógrafos, geófonos) Los geófonos y sismografos son dos de los principales instrumentos de adquisición sísmica que permite registrar los movimientos terrestre. El objetivo de este instrumental es registrar la ondas mecánicas (ondas P y ondas S) que se transmiten a través de la tierra, ya sean generadas por fuentes conocidas (prospección sísmica) o bien por los movimientos propios de los movimientos de la corteza terrestre (sismos/microsismos). Existen varias clases de instrumentales con distintas tecnologías, pero en todos los casos es esencialmente un sistema oscilante amortiguado que es forzado por las ondas propagándose a través de la tierra. En el esquema de la figura se muestra un ejemplo de un sismógrafo y cómo registra. Como se ve es un sistema oscilante

que consiste en una base o soporte, firmemente anclada en el terreno, a la que está unida una masa m mediante un muelle-amortiguador. El movimiento relativo entre la masa y la base se puede registrar gráficamente mediante un tambor giratorio (como muestra la figura) o como veremos más adelante en la materia, mediante transductor que lleve el movimiento a variaciones de voltaje. Suponga que la base recibe de la tierra una vibración de la forma $y(t) = Bcos(\omega t)$ y se quiere conocer el valor de $x(t)$, el registro sísmico, que es la variación de la posición de la masa respecto de la del tambor, que se encuentra sobre la misma base. La ecuación diferencial que describe el movimiento de $x(t)$ respecto de la base se puede escribir como la de un oscilador amortiguado forzado pero que en vez de estar forzado directamente por la $F = y(t)$ está forzado por $F = -\ddot{y}(t) = -\omega^2 Bcos(\omega t)$,

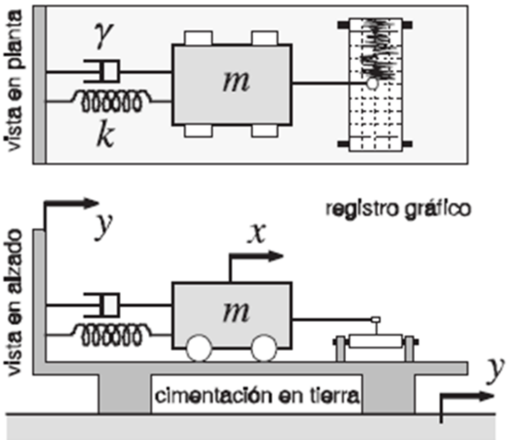

Figure 5: Esquema de un sismografo analógico. En este caso se trata de uno que registra las ondas S (movimientos laterales de la tierra)

(a) Escriba la ecuación diferencial y encuentre la solución estacionaria para $x(t)$ que es el registro del sismógrafo.[recuerde de usar las exponenciales complejas y proponga $x(t) = Ae^{i\omega t}$].

(b) Encuentre una expresión la relación entre la salida y la entrada (A/B) en función de la frecuencia ω de la perturbación sísmica. Compare esta la curva con la de resonancia obtenda en los ejercicios anteriores?

(c) El gráfico de la figura muestra distintas curvas para la relación del ítem anterior para distitnos valores de la relación entre la frecuencia propia del oscilador (ω_0) y la disipación $(\beta = \gamma/2m)$. Asimismo la tabla muestra los rangos de frecuencia típicos de las vibraciones terrestres. Diseñe un sismógrafo adecuado para detectar ondas S de un sismo de magnitud mayor a 2.

(d) En la práctica, la oscilación de entrada no suele corresponder a una única frecuencia, sino que suele consistir en una combinación de varías frecuencias e, incluso, presentar un espectro continuo de frecuencias. En estas condiciones, resulta deseable que la razón A/B entre las amplitudes de salida y de entrada sea aproximadamente igual a la unidad en el intervalo de frecuencias de entrada; entonces, se dice que instrumento presenta una respuesta plana. Qué relación entre ω_0 y β elegiría para optimizar la respuesta del sismógrafo. Qué pasa en ese caso con las bajas frecuencias?

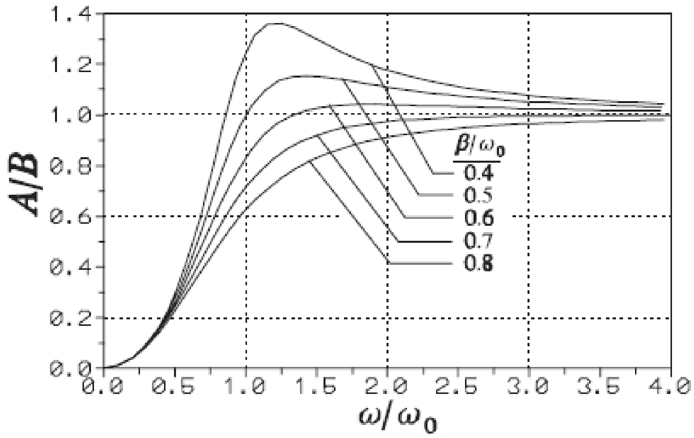

Figure 6: Curvas de resonancia para el sismógrafo en distintos valores de los parámetros

Frequency (Hz)	Type of measurements
0.00001-0.0001	Earth tides
0.0001-0.001	Earth free oscillations, earthquakes
0.001-0.01	Surface waves, earthquakes
0.01-0.1	Surface waves, P and S waves, earthquakes with M > 6
0.1-10	P and S waves, earthquakes with M> 2
10-1000	P and S waves, earthquakes, M< 2

Figure 7: Tabla de frecuencias de vibraciones de la Tierra por distintas causas