Guia 8 F1ByG - RCL - Corriente Alterna - Cátedra G.Mindlin

2do Cuatrimestre 2017

I Circuitos con resistencias (R), capacitores (C) e inductancias (L)

Podemos definir un nuevo elemento en nuestros circuitos eléctricos que da cuenta de la interacción del campo magnético con las corrientes eléctricas. En la forma de la ley de Faraday-Lenz, un circuito que enlaza campo magnético siente la acción de una fuerza electromotriz proporcional a la variación temporal del flujo magnético, $\epsilon_{ind} = d\phi_b/dt$ Para amplificar los efectos del campo magnético en el circuito, se enrolla el cable a la manera de un solenoide. Recordemos que el campo magnético B en el solenoide es proporcional a la corriente que circula por las espiras, y que si esta disposición geométrica no cambia en el tiempo y no hay campos externos, la única variación de flujo magnético provendrá de la variación de la propia corriente que circula a través del solenoide. La f.e.m. inducida será entonces $\epsilon_{ind} = -Ldi/dt$, dónde L es un factor geométrico que lleva el nombre de autoinductancia.

1. Escriba la ecuación diferencial para la carga q en el circuito LC esquematizado abajo. Encuentre el análogo mecánico. Demuestre que el circuito oscila con una frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y encuentre $q(t)$ si a $t = 0$ se cierra la llave el capacitor cargado con Q.

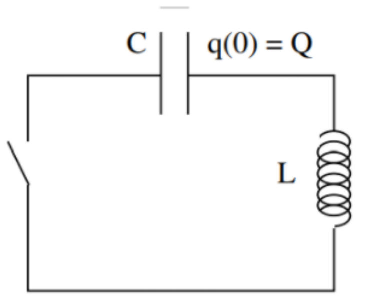

Figure 1: Circuito LC

2. Se carga un capacitor de 5 nF y se descarga a través de una bobina. Calcule la inductancia de la bobina L si la corriente oscila con una frecuencia de 5 KHz.

3. Se tiene un circuito LC como el de la figura con $C = 10\ mF$ y $L = 4\ H$, donde la carga inicial tiene un valor $Q_0 = 0.5\ C$; en $t = 0$ se cierra el interruptor s.

   (a) ¿Cuál es el valor inicial de la corriente?

   (b) Halle los valores máximos de la corriente y el voltaje, y la frecuencia de oscilación (Ayuda: plantee y resuelva la ecuación diferencial para la carga Q en el circuito). ¿Qué valor deberían tomar los parámetros equivalentes de un oscilador mecánico (k y m) para que oscile con la misma frecuencia?

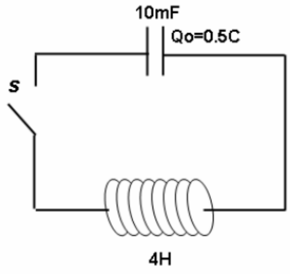

Figure 2: Circuito LC

4. Escriba la ecuación diferencial para la corriente i en el circuito RL esquematizado abajo. Si inicialmente en $t = 0$ circula una corriente i_0 por el circuito de la figura, encuentre cómo evoluciona temporalmente la corriente i. Realice el gráfico de $i(t)$ y $v(t)$ en la inductancia.

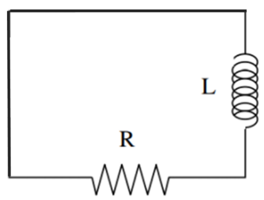

Figure 3: Circuito RL

5. En el circuito de la figura, hallar:
   (a) El valor de la corriente a través de la bobina en el instante inmediatamente posterior a cerrar el interruptor s1, y luego de que el sistema llega a su estado estacionario.
   (b) Si se toma como potencial de referencia el punto a (Va=0) ¿cuál es el valor del potencial en b y c en el equilibrio?¿cuál es el valor de la constante de tiempo de este sistema? A continuación se cierra el interruptor s2, y se abre s1
   (c) ¿cuál es el valor final de la corriente?

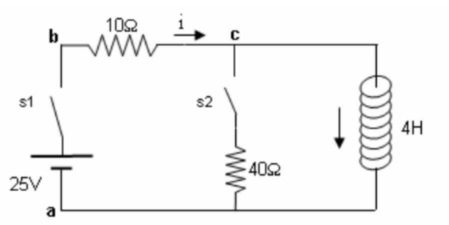

Figure 4: Circuito RL

6. Escriba la ecuación diferencial para la carga q en el circuito RLC esquematizado abajo. Considerando las soluciones que ya encontramos durante el curso para el sistema mecánico análogo y si en $t = 0$ se cierra el circuito con el capacitor con carga Q:

(a) Describa las soluciones cualitativamente distintas que puede presentar en función de sus parámetros: $R > 2\sqrt{L/C}$ y $R < 2\sqrt{L/C}$

(b) Demuestre que, para el caso oscilatorio, la frecuencia es $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$

(c) Establezca análogos para cada uno de los parámetros del sistema mecánico correspondiente.

(d) Cómo será la caída de tensión en cada elemento? (encuentre $V(t)$ en cada caso).

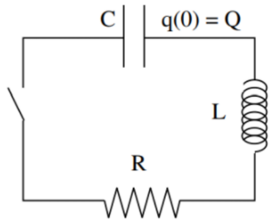

Figure 5: Circuito RCL

7. Para un circuito RLC con $L = 4\ H$ y $C = 10\ mF$ como en el ejercicio 3 y una resistencia R=2 ¿en qué régimen se encuentra el sistema?

8. Escriba la ecuación diferencial para la carga q en el circuito RLC esquematizado abajo, que es como el caso anterior pero con una fuente de corriente continua. Considerando las soluciones que ya encontradas anteriormente encuentre $i(t)$ y la caída de tensión $V(t)$ en cada elemento del circuito considerando el caso sub amortiguado si en $t = 0$ se cierra el circuito y el capacitor está descargado. Cuál es la principal diferencia con el caso del ejercicio anterior.

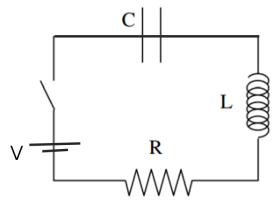

Figure 6: Circuito RCL

II Circuitos con corriente alterna: resonancia

Podemos estudiar las respuestas de los circuitos anteriores cuando se los somete a tensiones alternas. Consideramos ahora fuentes de tensión que varían sinusoidalmente según $\epsilon(t) = \epsilon_0 cos(\omega t + \phi)$ aplicada a los circuitos anteriores (RLC, LC, RC y LR) reemplazando la fuente de continua y la llave por una fuente de este tipo (simbolizada por una "onda", como se ve en las próximas figuras).

9. En la siguiente figura se muestra un circuito RL conectado a una fuente alterna que genera una fuerza de la forma $\epsilon(t) = \epsilon_0 cos(\omega t)$ tomando que la fase de la fuente es $\phi = 0$:

(a) Escriba la ecuación diferencial que lo caracteriza.

(b) Separe la ecuación en sus partes homogénea y particular. La solución completa del problema es, como siempre, la superposición de las soluciones:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

La dinámica del circuito puede entenderse como la competencia en el tiempo de dos respuestas. Una respuesta transitoria, en el que el comportamiento depende de las condiciones iniciales y de los parámetros del problema. Esta primera respuesta corresponde a la solución homogénea de la ecuación diferencial, que ya calculó en la primera parte de esta guía, y que decae en el tiempo (en los circuitos con una R). La que sobrevive es la solución estacionaria (que corresponde a la solución particular de la ecuación diferencial). La corriente, en este caso, puede escribirse como $i_p(t) = i_0 cos(\omega t)$, con la misma frecuencia ω de la fuente (esta es una característica de los circuitos lineales, cuya corriente termina siguiendo pasivamente la frecuencia propia de la fuente).

(c) Al igual que oscilador mecánico forzado, para resolver la ecuación diferencial resultante se propone pasar al plano complejo, escribiendo la fuente alterna como: $\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ y la solución particular $i_p(t) = \hat{i_0} e^{i\omega t}$, con $\hat{i_0}$ complejo pues puede incluir un desfasaje entre la corriente y la fuerza generadora (tomando parte real de ambas magnitudes como las del sistema). Encuentre la relación entre la corriente resultante ($i_p(t)$) y el potencial ($V(t)$) reemplazando la solución particular en la ecuación diferencial y despejando i_0 en función de ϵ_0. [ayuda: revise lo aprendido en la primer mitad de la materia para el oscilador mecánico forzado, vea que el potencial alterno es el forzante y la corriente es la oscilación resultante].

(d) Demuestre que la relación obtenida entre las amplitudes de la corriente obtenida y la fuerza generadora es

$$\hat{i_0} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{i\theta} \epsilon_0$$

y que la fase es $tg\theta = \frac{-\omega L}{R}$. Note que al ser negativa la tangente, indica que el desfasaje es también lo es, por lo tanto en el circuito RL la corriente sigue "retrasada" a la fuente.

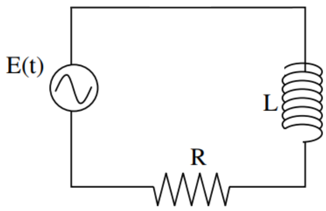

Figure 7: Circuito RL alterna

10. Repita los pasos del ejercicio anterior para el circuito RC de la figura, considerando que inicialmente no hay carga en el capacitor cuando se prende la fuente alterna:

(a) Encuentre la ecuación diferencial para la carga q. Derive a ambos lados de la ecuación y obtenga una ecuación diferencial para i. [nuevamente resuelva pasando al plano complejo, note que al derivar también debe derivar la expresión del forzante de la fuente].

(b) Encuentre la relación entre la corriente generada y la fuerza electromotriz generadora. Demuestre que en este caso la corriente se "adelanta" a la fuente (es decir la fase es positiva) [encuentre expresiones análogas a las del ítem b) del ejercicio anterior pero para el circuito RC].

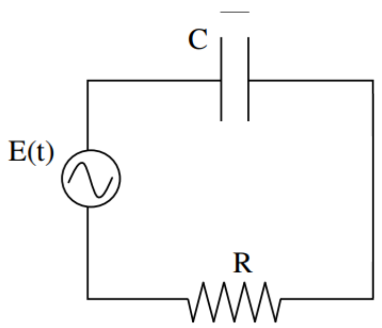

Figure 8: Circuito RC alterna

11. Repita los pasos de los ejercicios anteriores para el circuito LC de la figura considerando que en el instante en que se prende la fuente no hay cargas en el capacitor $Q_0(t_0 = 0) = 0$.

    (a) Encuentre la ecuación diferencial para la carga q. Derive a ambos lados de la ecuación y obtenga una ecuación diferencial para i. [nuevamente resuelva pasando al plano complejo, note que al derivar también debe derivar la expresión del forzante de la fuente].

    (b) Encuentre la relación entre la corriente generada y la fuerza electromotriz generadora. Pruebe que el coeficiente que relaciona ambas magnitudes es un número puramente imaginario y demuestre que si $\omega L < 1/\omega C$ el circuito se comporta como si fuera puramente capacitivo y si $\omega L > 1/\omega C$ se comporta como si fuere puramente inductivo. [nota: en este circuito no hay ningún elemento disipativo (R) como para "apagar" al transitorio, es por ello que se estudia el circuito RCL como se verá en el siguiente ejercicio]

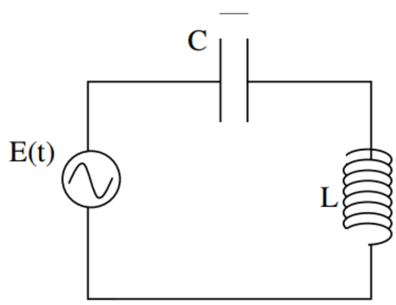

Figure 9: Circuito LC alterna

12. Repita los pasos anteriores para el circuito RCL de la figura considerando que en el instante en que se prende la fuente no hay cargas en el capacitor $Q_0(t_0 = 0) = 0$.

    (a) Encuentre la ecuación diferencial para la carga q. Derive a ambos lados de la ecuación y obtenga una ecuación diferencial para i. [nuevamente resuelva pasando al plano complejo, note que al derivar también debe derivar la expresión del forzante de la fuente].

    (b) Demuestre que la solución particular, que viene proponiendo en los problemas de corriente alterna, describe el comportamiento de la corriente para tiempos grandes respecto del tiempo típico del transitorio. Encuentre que este tiempo es del orden de $\tau = 2L/R$.

    (c) Como se ha venido demostrando en los ejercicios anteriores, la fase ϕ y la amplitud i_0 dependen de la frecuencia de la fuente, es decir, $\phi = \phi(\omega)$ y $i_0(\omega)$. Sin hacer cálculos, describa cualitativamente qué respuestas espera encontrar para frecuencias muy bajas y muy altas [use lo aprendido en los problemas anteriores de los circuitos RC, RL y LC. Recuerde que cuando $\omega L < 1/\omega C$ un capacitor y una inductancia en serie funcionan como un capacitor y en caso contrario funcionan como una inductancia].

(d) Encuentre la expresión analítica para $i_0(\omega)$ y $\phi(\omega)$

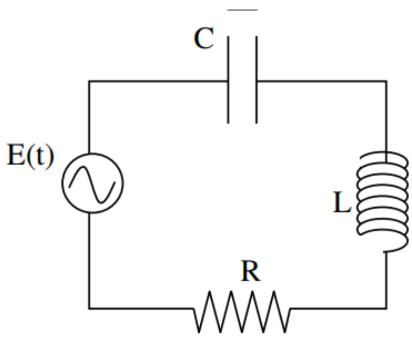

Figure 10: Circuito RCL alterna