Guia 9 F1ByG - CA: Impedancias y Filtros 1er orden- Cátedra G.Mindlin

2do Cuatrimestre 2017

Impedancia y filtros pasivos

Luego de trabajar con cicuitos con R, C y L forzados con corrientes alternas, se puede comprobar que cada uno de los elementos tiene asociado un valor de "resistencia compleja" que se conoce con el nombre de impedancia y se representa con la letra Z. Se puede definir por lo tanto una ley de Ohm extendida

$$V = IZ$$

donde V e I varían en el tiempo y se representan también con números complejos. A cada uno de los tres elementos pasivos que hemos estudiado le corresponde un valor de impedancia (lo hemos visto en la guía pasada como se demuestra) como indica la siguiente tabla:

$\mathbf{Z}_R = R$	(resistor)
$\mathbf{Z}_C = -j/\omega C = 1/j\omega C$	(capacitor)
$\mathbf{Z}_L = j\omega L$	(inductor)

Figure 1: Tabla con los valores de impedancia para cada uno de los elementos pasivos. Aclaración: j es el i de imaginario que en estos casos se usa para no confundir con la corriente I

Siguiendo la analogía con corriente continua, las impedancias en serie y en paralelo siguen la misma regla que las resistencias:

$$Z_{serie} = Z_1 + Z_2 ..... + Z_n$$

$$1/Z_{paralelo} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + ... + 1/Z_n$$

Con estas reglas es posible analizar muchos circuitos con corriente alterna como hemos estudiado los circuitos de corriente continua, es decir aplicando las reglas de serie y paralelo y la ley de Ohm. En particular algunos resultados importantes obtenidos para corriente continua son los mismos, como por ejemplo: el circuito divisor de tensión que estaba en la guía 7 se mantiene de la misma manera pero con Z y V_{in}/V_{out} complejos. Asimismo para circuitos con varias redes conectadas las leyes de Kirchhoff siguen siendo válidas como en circuitos con corriente continua solo que en este caso el voltaje y la corriente son complejas, i.e: la suma del voltaje como número complejo a lo largo de un camino cerrado es cero y a suma de las corrientes complejas en un punto es cero (por lo que se deduce que es un circuito con elementos todos en serie la corriente del circuito es única en todos lados [recordar ejercicio de la guía 8]).

1. Demuestre que el divisor de tensión estudiado en la guía 7 se puede generalizar como muestra la figura 2, donde las simples resistencias fueron (una o ambas) reemplazadas por un capacitor o una inductancia (o por alguna combinación de R,L y C más complicada) con impedancias Z_1 y Z_2. Use la ley de Ohm extendida y la regla de impedancias en serie, note a su vez que en este caso el V_{out} varía en el tiempo en la medida que lo hace el V_{in}

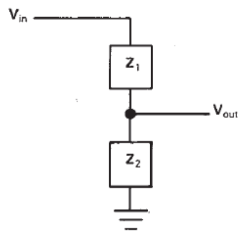

Figure 2: Divisor de tensión en CA

2. **Filtro Pasa Alto de orden 1- RC** Considere el divisor de tensión generalizado a CA del ejercicio anterior, en la ubicación de Z_2 coloque una resistencia R y en la ubicación de Z_1 un capacitor de capacidad C como se muestra en la figura 3. Este circuito constituye un filtro pasa alto, que significa que la respuesta de la amplitud de salida es mayor para frecuencias altas que para frecuencias bajas , siendo 0 para frecuencias nulas y máxima para frecuencias muy altas. A partir de qué frecuencia comienza a filtrar o cuando se consideran frecuencias "bajas" o "altas" dependerá de los valores de R y C

   (a) Demuestre que la expresión para la función de transferencia definida como $H(i\omega) = V_{out}/V_{in}$, tiene la forma
   $$H(i\omega) = \frac{i\omega}{i\omega + 1/RC}$$

   (b) Se define $\omega_0 = 1/RC$ como la frecuencia a la que el filtro comienza a atenuar considerablemente, demuestre que para ese caso $|H(i\omega)| = 1/\sqrt{2}$. Esta frecuencia es la que caracteriza al filtro. [para ello evalúe H en $\omega = 1/RC$ y calcule el módulo] Qué valor espera obtener de $|H(i\omega)|$ para valores $\omega >> \omega_0$?

   (c) Demuestre que además este filto aporta un desfaje respecto de la señal de entrada. [nota: se obtiene calculando la fase del número complejo que es la función $H(i\omega)$]

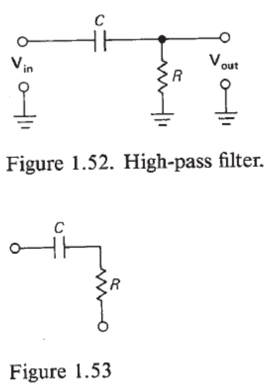

Figure 3: Filtro pasivo pasa alto, RC

3. **Filtro Pasa Alto de orden 1- RL** Otra forma de construir un pasa bajo pasivo es utilizando una inductancia y una resistencia como indica la figura 5.

   (a) Demuestre que la expresión para la función de transferencia definida como $H(i\omega) = V_{out}/V_{in}$, tiene la misma forma que el ejercicio anterior con la diferencia que $\omega_0 = R/L$ en este caso

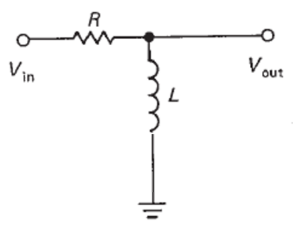

Figure 4: Filtro pasivo pasa alto, RL

4. **Filtro Pasa bajo de orden 1- RC** Intercambiando la ubicación de la resistencia y del capacitor en el divisor de tensión generalizado a corriente alterna del filtro pasa alto de la figura 3 se obtiene un filtro pasa bajao pasivo.

   (a) Demuestre que la función de transferencia es

$$H(i\omega) = \frac{1/RC}{i\omega + 1/RC}$$

   (b) Demuestre entonces que la respuesta en frecuencia de este filtro es el de la figura. (grafique el módulo de función de transferencia).

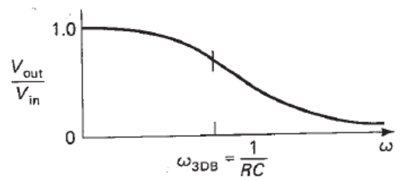

Figure 5: Respuesta en frecuencia del filtro pasa bajo pasivo

5. **Filtro Pasa bajo de orden 1- RL** Intercambiando la ubicación de la resistencia y la inductancia de la figura 5 se obtiene un filtro pasiva pasa bajo de orden 1.

   (a) Encuentre cuál es la expresión para la función de transferencia $H(i\omega)$ y el valor de ω_0 tal que la $|H(i\omega)|$ cae a $1/\sqrt{2}$

   (b) Encuentre cuál es el valor del desfasaje entre la señal de entrada y la de salida para dicho valor de ω_0.

6. **Resumen de filtros de primer orden** Luego de haber analizado los 4 casos de filtros de primer orden con los elementos pasivos R, L y C, puede conlcuir que la expresión general para la función de transferencia $H(i\omega) = V_{out}/V_{in}$ es:

$$H(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0}$$

   donde se define $s = i\omega$ y ω_0 es la frecuencia para la cual $|H(s)| = 1/\sqrt{2}$.

   (a) Cuál es el valor de a_1 para los dos filtros pasa bajos? Y de los filtros pasa altos? Para a_0, cuáles son los valores en ambos filtros?

(b) Cuál es el valor de ω_0 para los filtros construidos con RC? y para los filtros construidos con RL?

(c) Grafique la función $H(s)$ y diga a que tiende cuando s tiende a 0 y cuando s tiende a infinito (es decir frecuencias bajas y frecuencias altas) y relacione con las conclusiones obtenidas en los ítem anteriores y la función de filtrado que cumple cada circuito.

Filtros de segundo orden
Cuando se construye un filtro empleando más elementos pasivos se puede obtener otro tipo de filtro que se conoce como filtro de segundo orden debido a que la función de transferencia presenta términos cuadráticos en s (recordar que $s = i\omega$). En forma general la función de transferencia obtenida para los filtros de segundo orden es

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + 2\omega_0 \xi s + \omega_0^2}$$

al igual que se vio en el ejercicio anterior dependiendo de los valores que toma cada uno de los coeficientes del polinomio del numerador es el tipo de filtro que se trata (pasa bajo, pasa alto y en este caso aparecen filtros pasa banda o rechaza banda). La forma de deducir las funciones de transferencia será igual que lo realizado para filtros de primer orden, es decir pensándolo como un divisor de tensión, pero en estos casos antes se deberá asociar impedancias en serie o en paralelo de forma que quede que un esquema como el de la figura 2 donde Z_1 puede ser una Z_{eq} y lo mismo Z_2

7. **Filtro pasa alto segundo orden** El circuito de la figura 6 es un filtro pasa alto usando R,C y L. Notar que no es más que un circuito RCL como los estudiados en la guía 8, que se toma el potencial de salida en los bornes de la impedancia. Utilizando que Z_1 del divisor de tensión es la impedancia resultante de la serie entre el capacitor y la resistencia ($Z_C + Z_R$) y el Z_2 es la correspondiente a la inductancia, demuestre:

   (a) La función de transferencia $H(s)$ obtenida para este filtro es

   $$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

   (b) Grafique la función H obtenida como función de s y vea cómo es el comportamiento para los valores de $R = 1\ K\Omega$, $L = 4\ H$ y $C = 2\ \mu F$. (use cualquier graficador de funciones que conozca, hay varios on line).

   (c) Estudie graficamente la dependencia de la función de transferencia variando los valores de los elementos pasivos. Es decir, que ocurre si aumenta el valor de L, qué ocurre si aumenta el valor de R

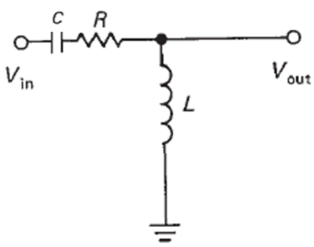

Figure 6: Filtro pasa alto pasivo de segundo orden

8. **Filtro pasa bajo segundo orden** Para obtener un filtro de segundo orden pasa bajo, nuevamente se debe considerar un circuito RCL pero tomar el potencial de salida en los bornes del capacitor (en vez de la inductancia como el ejercicio anterior) como muestra la figura 8.

   (a) Encuentre cuanto vale cada uno de los parámetros a_i, ξ y ω_0 de la función transferencia para este filtro.

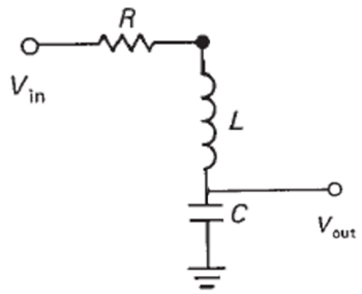

Figure 7: Filtro pasa alto pasivo de segundo orden

(b) Grafique como es la función $H(s)$

9. **Filtro pasa banda de segundo orden** Demuestre que si toma la diferencia de potencial del circuito RCL en los bornes de la resistencia obtiene un filtro pasa banda. Es decir que permite pasar una banda, centrada en una frecuencia específica. Muestre que dicha frecuencia es la frecuencia de resonancia del circuito. Encuentre la función de transferencia $H(s)$ para dicho caso.

10. **Filtro rechaza banda de segundo orden** Acomodando de forma distinta los mismos tres elementos pasivos, como se muestra en la figura, se puede crear un filtro rechaza banda. Es decir que permite pasar casi todas las frecuencias pero evita una banda. Nuevamente pensándolo como un divisor de tensión halle la función transferencia $H(s)$ y grafique $H(s)$ vs s para distintos valores de RCL.

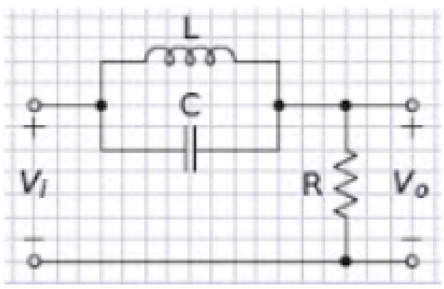

Figure 8: Filtro rechaza banda