

# Guia 0 FyB - Repaso matemática - Vectores y ODEs - Cátedra G.Mindlin

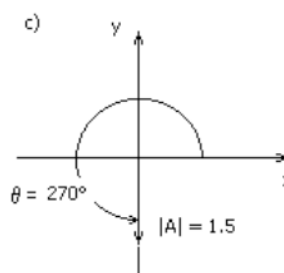
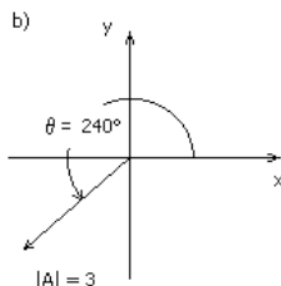
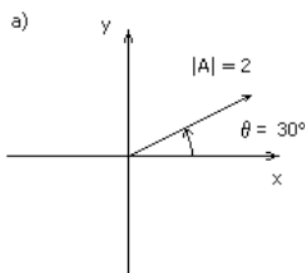
2do Cuatrimestre 2017

## Vectores

1) Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Representélos gráficamente.

$$\mathbf{A} = (-4; 3) \quad \mathbf{B} = (2; 0) \quad \mathbf{C} = -2\hat{x} - 3\hat{y} \quad \mathbf{D} = 0\hat{x} - 5\hat{y}$$

2) Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3) Dados los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  indicados, halle gráficamente su suma.

a)  $\mathbf{A} = (-3; 2)$

$\mathbf{B} = (-2; 5)$

b)  $\mathbf{A}$  tal que  $|\mathbf{A}| = 2$ ,  $\theta = 240^\circ$

$\mathbf{B}$  tal que  $|\mathbf{B}| = 3$ ,  $\theta = 135^\circ$

c)  $\mathbf{A} = (-2; 0)$

$\mathbf{B} = (0; 4)$

4) Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , y del  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ . ¿El módulo del vector suma,  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , es igual a la suma de los módulos de  $\mathbf{A}$  y de  $\mathbf{B}$ ?

5) Halle el vector que tiene origen en el punto  $\mathbf{A}$  y extremo en el punto  $\mathbf{B}$  en los siguientes casos:

a)  $\mathbf{A} = (2; -1)$  y  $\mathbf{B} = (-5; -2)$ .

b)  $\mathbf{A} = (2; -5; 8)$  y  $\mathbf{B} = (-4; -3; 2)$ .

6) Dados los vectores:

$$\mathbf{A} = (3\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}) \quad \mathbf{B} = (4\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}) \quad \mathbf{C} = (-2\hat{y} - 5\hat{z})$$

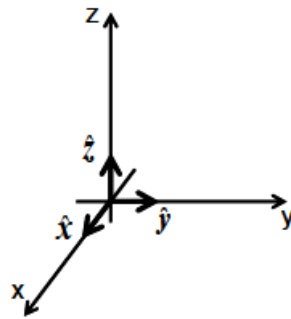
efectúe las siguientes operaciones:

a)  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})/|\mathbf{C}| + \mathbf{C}$

b)  $5\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$

c)  $-2\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}/5$

Se define el **producto escalar** de dos vectores como  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forman los dos vectores.



$$\hat{x} = (1;0;0) \quad \hat{y} = (0;1;0) \quad \hat{z} = (0;0;1)$$

Calcule  $\hat{x} \cdot \hat{x}$ ,  $\hat{x} \cdot \hat{y}$ ,  $\hat{x} \cdot \hat{z}$ ,  $\hat{y} \cdot \hat{x}$ ,  $\hat{y} \cdot \hat{y}$ ,  $\hat{y} \cdot \hat{z}$ ,  $\hat{z} \cdot \hat{x}$ ,  $\hat{z} \cdot \hat{y}$ ,  $\hat{z} \cdot \hat{z}$

- 8) Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad \mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

entonces

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
---

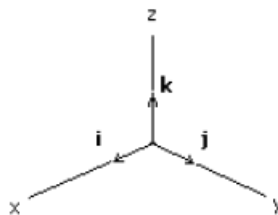
- 9) Efectúe el producto escalar de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  y diga si en algún caso  $\mathbf{A}$  es perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

- a)  $\mathbf{A} = 3\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$                        $\mathbf{B} = -\hat{x} + 3\hat{z}$   
 b)  $\mathbf{A} = (2; 3; -1)$                                $\mathbf{B} = (6; -5; 2)$   
 c)  $|\mathbf{A}| = 3$      $|\mathbf{B}| = 2$      $\theta = 60^\circ$     ( $\theta$ : ángulo entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ )

Se define el **producto vectorial** como  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$  tal que

- a)  $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forman los dos vectores  
 b)  $\mathbf{C}$  tiene dirección perpendicular al plano determinado por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$   
 c) El sentido es tal que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  tengan la misma orientación en el espacio

- 10) Sean  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ , los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura



Calcule  $\hat{i} \times \hat{i}$ ,  $\hat{i} \times \hat{j}$ ,  $\hat{i} \times \hat{k}$ ,  $\hat{j} \times \hat{i}$ ,  $\hat{j} \times \hat{j}$ ,  $\hat{j} \times \hat{k}$ ,  $\hat{k} \times \hat{i}$ ,  $\hat{k} \times \hat{j}$ ,  $\hat{k} \times \hat{k}$ .

- 11) Usando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \qquad \mathbf{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

entonces  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y ; A_z B_x - A_x B_z ; A_x B_y - A_y B_x)$

12) Sean los vectores  $\mathbf{A} = (3; 2; 1)$   $\mathbf{B} = (1; 0; -1)$   $\mathbf{C} = (0; -2; 4)$  calcule:

- a)  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$
- b)  $-4(\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \mathbf{A}$
- c)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$
- d)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

## II. Ecuaciones Diferenciales

13) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentra las funciones  $y(t)$ . En todos los casos,  $y_0$  es una constante.

(a)  $\frac{dy}{dt} = 2 ; y(0) = 0$

(b)  $\frac{dy}{dt} = a ; y(0) = y_0$

(c)  $\frac{dy}{dt} = e^t + 2 ; y(0) = y_0$

(d)  $\frac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0 ; y(0) = y_0$

(e)  $\frac{dy}{dt} = 2y ; y(1) = y_0$

(f)  $t \frac{dy}{dt} = 1 ; y(1) = y_0$

14) Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos  $x(0) = x_0$  y  $x'(0) = v_0$  ( $F$  y  $A$  son dos constantes)

a)  $m x'' = F ;$       b)  $x'' = A.t$       c)  $x'' = e^t$

*Ayuda:* Muchas veces, para resolver una de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de  $x''$ , usar  $x' = v$  y  $x'' = v'$ .

*Notación:*  $x' = \frac{dx}{dt}$  y  $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

15) Probar que  $x = \cos(3t)$  es una solución de la ecuación  $x'' = -9.x$