

Contenido

MASA SUJETA A UN MUELLE
PÉNDULO SIMPLE
CIRCUITO LC
MOVIMIENTO DE SISTEMAS DESPLAZADOS DESDE
UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE
ENERGÍA POTENCIAL Y CINÉTICA MEDIA
ROZAMIENTO
Velocidad límite
OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO
Ejemplo. Disipación de potencia
Factor de calidad Q
OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO
PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN
Problemas
Temas avanzados:
Oscilador anarmónico
Oscilador armónico forzado con fuerza de
amortiguamiento
Ejemplo. Estudio numérico de un oscilador armónico
Problema
Notas matemáticas:
Fuerza resistente
Velocidad límite
Fuerza del muelle
Fuerza del muelle y fuerza resistente
Los números complejos y el oscilador armónico
forzado
Lecturas suplementarias



Oscilador armónico: propiedades y ejemplos

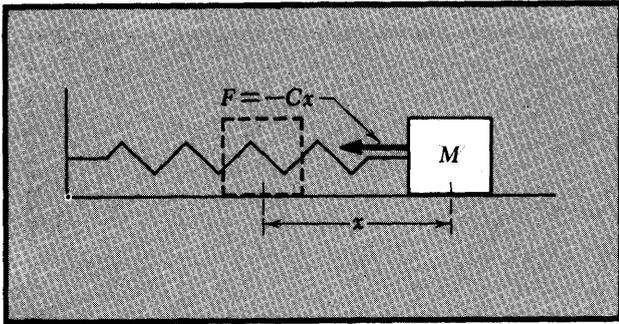


FIG. 7.1 Muelle tenso actuando sobre una masa M . En la posición marcada por una línea de puntos el muelle no está sometido a tensión alguna.

El oscilador armónico es un ejemplo de excepcional importancia del movimiento periódico porque sirve de modelo exacto o aproximado para muchos problemas en física clásica y cuántica. Los sistemas clásicos que son casos reales de un oscilador armónico incluyen cualquier sistema estable que se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como por ejemplo:

1. Un péndulo simple, en el límite correspondiente de ángulos de oscilación pequeños.
2. Una masa sujeta a un muelle, en el límite de amplitudes de oscilación pequeñas.
3. Un circuito eléctrico compuesto de una inductancia y una capacitancia, para corrientes o voltajes lo suficientemente pequeños para que los elementos del circuito sean lineales.

Un elemento de un circuito eléctrico o mecánico se dice que es lineal si la respuesta es directamente proporcional a la solicitud. La mayoría de los fenómenos (pero no todos aquellos que son de interés) en física son lineales, si el intervalo que se considera es suficientemente pequeño, del mismo modo que la mayor parte de las curvas que nos encontramos pueden considerarse que son líneas rectas para un intervalo suficientemente pequeño de valores.

Las propiedades más importantes del oscilador armónico son las siguientes:

1. La frecuencia del movimiento es independiente de la amplitud de la oscilación dentro de las restricciones de linealidad.
2. Los efectos de varias solicitudes pueden superponerse linealmente.

En este capítulo estudiaremos estas propiedades del oscilador armónico. Consideraremos tanto el movimiento libre como el forzado, con y sin amortiguamiento, aunque los principales elementos del movimiento forzado se exponen en el Tema Avanzado al final de este capítulo. También trataremos como Tema Avanzado los efectos de las interacciones no lineales, pues resulta útil tener conocimiento de tales tipos de movimiento.

MASA SUJETA A UN MUELLE

En el Cap. 5 considerábamos la energía potencial de un muelle estirado o comprimido en el cual la fuerza es directamente proporcional a la tensión o compresión

$$\mathbf{F} = -Cx\hat{x}$$

en donde x es positivo para una tensión y negativo para una compresión. ¿Cuál es el movimiento de una masa M sometida a tal fuerza? Idealmente podemos imaginar, como en la fig. 7.1, una masa que se mueve sobre una mesa sin rozamiento:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{M} \quad (7.1)$$

(Esta ecuación se discute en las Notas Matemáticas al final de este capítulo. Aquellos alumnos poco familiarizados con la solución deben estudiar estas notas antes de seguir.)

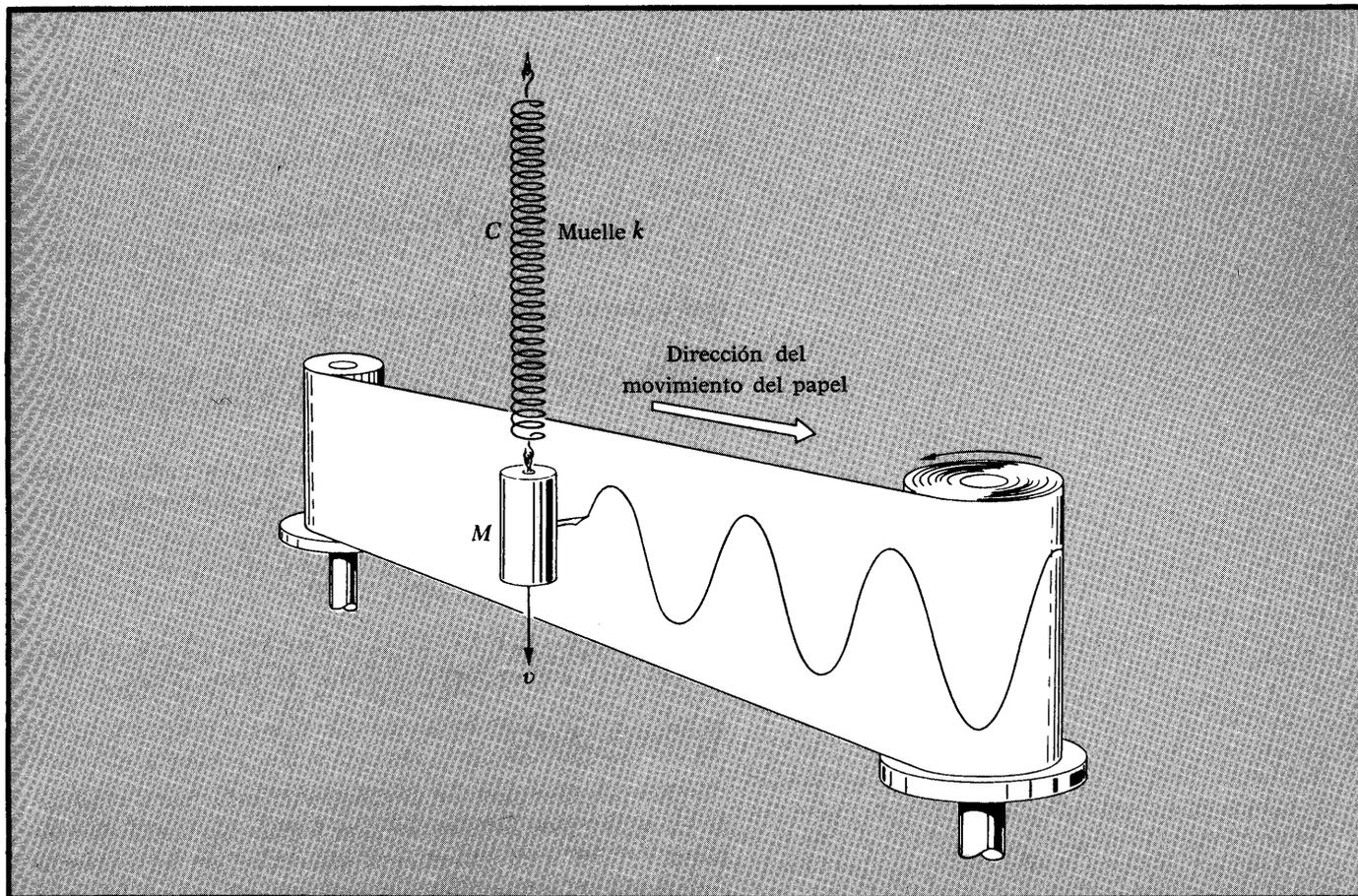
La solución puede expresarse en la forma

$$x = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \quad (7.2)$$

donde

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

FIG. 7.2 Oscilador armónico simple que se compone de una masa M y un muelle sin peso de constante de fuerza o rigidez C . Una plumilla sujeta a M dibujará una senoide sobre una cinta de papel que pase frente a M a velocidad constante.



Para $t = 0$, $x = x_0 = A \operatorname{sen} \phi$ y $dx/dt = v_0 = \omega_0 A \cos \phi$, a partir de lo cual pueden determinarse A y ϕ . La fig. 7.2 ilustra el movimiento. A se denomina *amplitud* y ϕ *fase*. La frecuencia y período vienen dados por

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{C}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad T = \frac{1}{f_0} = 2\pi \left(\frac{M}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

El resultado esperado es el siguiente: Cuanto más rígido es el muelle, es decir, mayor C , mayor resulta la frecuencia; cuánto mayor la masa, menor es la frecuencia.

También podemos enfocar este problema desde el punto de vista de la conservación de la energía [véase Ec. (5.21)]:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = \frac{1}{2}M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = E \quad (7.5)$$

Utilizando A como valor de x para $dx/dt = 0$, resulta $E = \frac{1}{2}CA^2$ y

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{C}{M} \right)^{\frac{1}{2}} (A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7.6)$$

La solución de esta ecuación es

$$\left(\frac{C}{M} \right)^{\frac{1}{2}} t = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{A} + \operatorname{const}$$

que coincide justamente con la Ec. (7.2)

$$x = A \operatorname{sen} \left[\left(\frac{C}{M} \right)^{\frac{1}{2}} t + \phi \right]$$

si la constante se hace igual a $-\phi$. Alternativamente podríamos haber derivado la Ec. (7.5) obteniendo

$$M \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + Cx \frac{dx}{dt} = 0$$

que se reduce a la Ec. (7.1). (Los Problemas 2 a 4, al final del capítulo, son ejemplos del uso de estas ideas.)

PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple se compone de una masa puntual M en el extremo inferior de una varilla sin masa de longitud L , que gira libremente alrededor de su extremo superior y se mueve en un plano vertical como indica la

fig. 7.3. Sabemos que el movimiento es semejante al de la masa sobre un muelle. Surge la pregunta: ¿Cuál es su frecuencia? La forma más directa de resolver este problema es escribir la forma apropiada de $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. Con referencia a la fig. 7.3 vemos que la distancia s , según el arco, la velocidad y la aceleración de M son

$$s = L\theta \quad v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Existen dos fuerzas en el problema: la fuerza de gravedad y la fuerza ejercida por la barra o la cuerda. Sin embargo, la barra no ejerce fuerza alguna a lo largo de s y, por tanto, sólo necesitamos considerar la componente de mg a lo largo de s . Según la fig. 7.3 vemos que esta componente es $mg \sin \theta$ en la dirección en que decrece θ . Por tanto, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se reduce para esta dimensión en

$$mg \sin \theta = -mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7.7)$$

Pero el desarrollo en serie de $\sin \theta$ es

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \quad (7.8)$$

y para valores pequeños de θ puede escribirse

$$mg \sin \theta = mg \theta$$

y la Ec. (7.7) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (7.9)$$

Esta ecuación es idéntica a la (7.1) con g/L en lugar de C/M y θ en lugar de x . Por tanto,

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (7.10)$$

en donde

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.11)$$

y la frecuencia que buscábamos, de acuerdo con las Ecs. (7.4) y (7.11) es $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{g/L}$.

La amplitud o valor máximo de θ es θ_0 ; $\theta_0 \sin \phi$ es el valor de θ para $t = 0$ y $\omega_0 \theta_0 \cos \phi$ es el valor de $d\theta/dt$. ¿Hasta qué valor de θ_0 es todavía válida nuestra hipótesis $\sin \theta = \theta$? La Tabla 7.1 nos da algunos valores del período para diversas amplitudes. Evidentemente la amplitud puede alcanzar hasta 20° antes de que el valor real

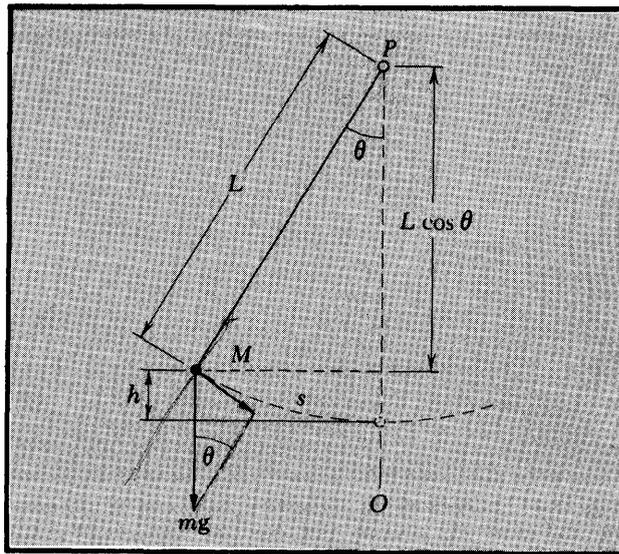


FIG. 7.3 El péndulo simple se compone de una masa puntual M en el extremo de una varilla sin masa L . El péndulo gira alrededor de un eje que pasa por P y es perpendicular al papel. La línea OP es vertical. s es la longitud de arco entre O y la posición de M .

TABLA 7.1

Amplitud, °	Período $\div 2\pi \sqrt{l/g}$
0	1,0000
5	1,0005
10	1,0019
15	1,0043
20	1,0077
30	1,0174
45	1,0396
60	1,0719

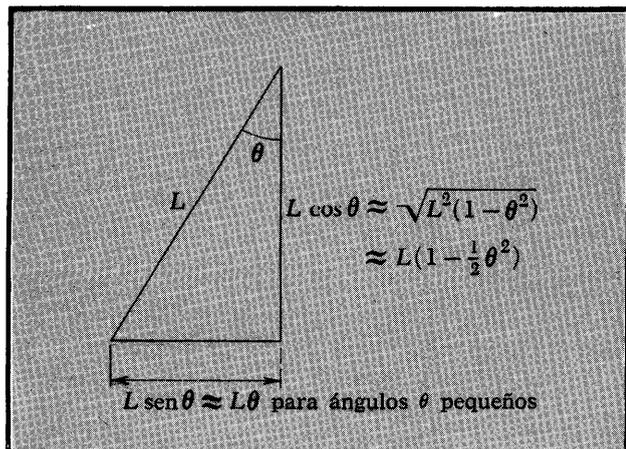


FIG. 7.4 El teorema de Pitágoras junto con el desarrollo del binomio, revelan por qué $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ para $\theta \ll 1$ radián.

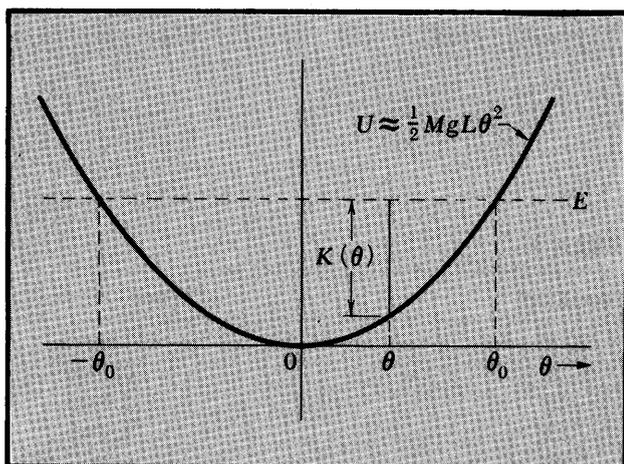


FIG. 7.5 Gráfica de la energía potencial en función de θ . El péndulo oscila entre los límites θ_0 y $-\theta_0$. En estos «puntos de retroceso», $E_c = 0$ y $U = E$. Para $\theta = 0$, $U = 0$ y $E_c = E$. Para $\theta \ll 1$ radián, $U \approx \frac{1}{2}MgL\theta^2$.

del período sobrepase el 1 por ciento del resultado que se obtiene con la aproximación de pequeña amplitud.

Veamos también el método de conservación de la energía para la resolución del problema. Cuando la varilla se desvía el ángulo θ , la masa M se eleva la distancia

$$h = L - L \cos \theta$$

como puede verse en las figuras de referencia (7.3 y 7.4). La energía potencial de la masa M en el campo gravitatorio terrestre es

$$U(h) = Mgh = MgL(1 - \cos \theta)$$

referida a la posición sin desviar (vertical) que se toma como origen de energía potencial. La energía cinética del péndulo es

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$$

en donde $v = L\dot{\theta}$ relaciona la velocidad y la variación del ángulo de desviación por unidad de tiempo. La energía total es

$$E = E_c + E_p = E_c + U = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos \theta) \quad (7.12)$$

Por la ley de la conservación de la energía sabemos que esta suma debe ser constante. Utilizaremos este hecho, así como la pequeñez del ángulo θ para obtener una solución de la frecuencia del movimiento. Ahora bien,

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 \dots$$

y, por tanto, para $\theta \ll 1$ rad, despreciamos los términos en θ^4 y potencias superiores, y la energía puede aproximarse, según la Ec. (7.12) por

$$E = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\theta^2 \quad (7.13)$$

Resolviendo la Ec. (7.13) para $\dot{\theta}$ resulta

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2E}{MgL} - \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.14)$$

Designaremos los puntos extremos del movimiento por θ_0 y $-\theta_0$; la amplitud de la oscilación es θ_0 . En estos puntos el péndulo está momentáneamente en reposo y su energía cinética es cero (fig. 7.5). Según la Ec. (7.13) con $\dot{\theta} = 0$, tendremos

$$E = \frac{1}{2}MgL\theta_0^2 \quad \theta_0^2 = \frac{2E}{MgL}$$

Así, pues, podemos escribir (7.14) en la forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} (\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

o

$$\frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

Esta ecuación es idéntica a la (7.6) y a continuación damos algunos detalles de su solución.

Si la condición inicial o la fase del movimiento es tal que θ tiene el valor θ_1 para $t = 0$, entonces

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t dt$$

La integral de la izquierda es elemental (Dwight 320.01):

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} &= \left[\text{sen}^{-1} \frac{\theta}{\theta_0} \right]_{\theta_1}^{\theta} = \text{sen}^{-1} \frac{\theta}{\theta_0} - \text{sen}^{-1} \frac{\theta_1}{\theta_0} \quad (7.15) \\ &= \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t \end{aligned}$$

Sabemos que $\text{sen arc sen } (\theta/\theta_0) = \theta/\theta_0$, de modo que (7.15) puede volverse a escribir como

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \text{sen} \left[\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t + \text{sen}^{-1} \frac{\theta_1}{\theta_0} \right]$$

$$\theta = \theta_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

en donde podemos identificar la pulsación ω_0 y la fase inicial ϕ con

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \phi = \text{sen}^{-1} \frac{\theta_1}{\theta_0}$$

de acuerdo con los resultados dados por las Ecs. (7.10) y (7.11).

Aunque ϕ en las Ecs. (7.2) o (7.10) tiene las dimensiones de un ángulo, no es fácil de visualizar como tal ángulo. Es importante entender las magnitudes A y ϕ para el caso de la masa del muelle, así como θ_0 y ϕ en el caso del péndulo. Las figs. 7.6 y 7.7 ilustran el significado de estos dos casos. Todos los ejemplos de oscilación libre tendrán el mismo tipo de constantes, aunque con

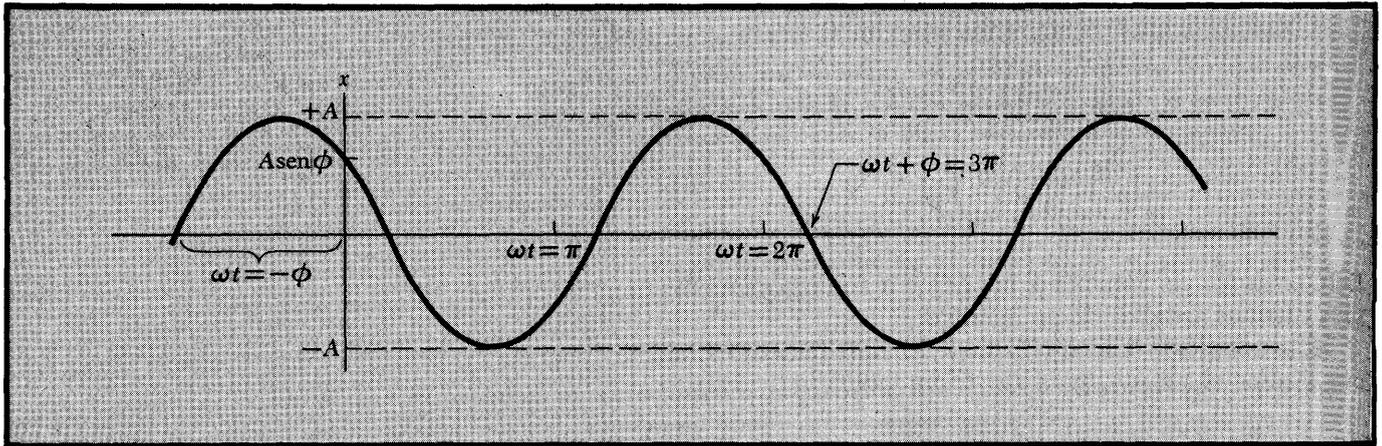


FIG. 7.6 La función $x = A \text{sen}(\omega t + \phi)$ representada en función de ωt ; $\phi \approx 3\pi/4$. Para $t = 0$, $x = A \text{sen} \phi$ y $dx/dt = \omega A \cos \phi$ negativa). (Nota: Por conveniencia hemos quitado el subíndice de ω_0 .)

frecuencia podemos elegir el momento en que $t = 0$ para que ϕ sea cero o $\pi/2$.

1. A y θ_0 son las amplitudes máximas de oscilación; es decir, el movimiento se dirige de $+A$ a $-A$ o de $+\theta_0$ a $-\theta_0$.

2. En función del ángulo $\omega_0 t$, ϕ es el ángulo tal que para $\omega_0 t = -\phi$, x o θ serían cero y crecerían desde valores negativos a positivos. Naturalmente, ésta es otra forma de decir que para $t = 0$, $x = A \text{sen} \phi$, o sea, $\theta = \theta_0 \text{sen} \phi$. Obsérvese cuidadosamente que en las figs. 7.6 y 7.7 el eje horizontal mide $\omega_0 t$ y no t .

3. Las condiciones iniciales determinan A y ϕ o θ_0 y ϕ aun en el caso de que los valores de las condiciones iniciales no sean ninguna de estas dos magnitudes.

El símbolo ω_0 se emplea con frecuencia para designar la frecuencia angular del movimiento natural o libre de un sistema oscilante. El subíndice «cero» en ω no tiene nada que ver con $t = 0$. La frecuencia angular * ω_0 está relacionada con la frecuencia f_0 de la oscilación libre del péndulo, como en la Ec. (7.11):

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(g/L)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \quad (7.16)$$

(*) Con frecuencia nos referimos a la pulsación ω , como frecuencia angular o simplemente frecuencia. Muchos físicos lo hacen así y no se produce ninguna confusión particular. El empleo del símbolo ω en lugar de f o ν servirá normalmente para identificar una magnitud como una frecuencia angular. En cuanto a los valores numéricos, ν y f vienen dados normalmente en ciclos por segundo (cps) o Hz; ω se da en radianes por segundo o simplemente en s^{-1} , sobreentendiéndose los radianes. Un radián carece de dimensiones. También es bastante común distinguirlos entre sí expresando la frecuencia ν en vibraciones/s o revoluciones/s y la frecuencia angular ω en radianes/s. Ambas tienen dimensiones de s^{-1} .

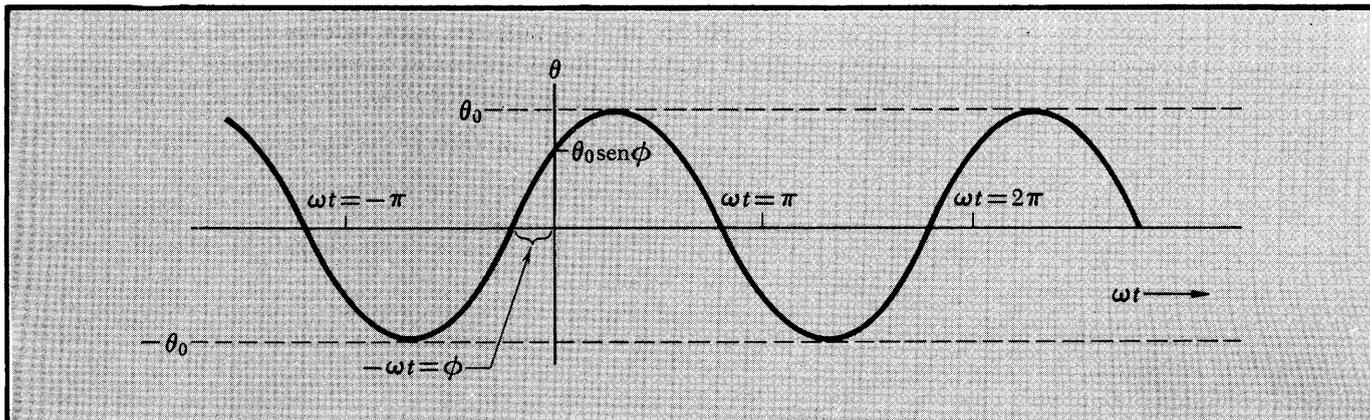


FIG. 7.7 La función $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ representada en función de ωt ; $\phi \approx \pi/4$. Para $t = 0$, $\theta = \theta_0 \sin \phi$ y $d\theta/dt = \omega\theta_0 \cos \phi$ (positiva). (El valor de ω_0 en el texto se escribe aquí simplemente ω .)

Si $L = 100$ cm, tendremos $\omega_0 \approx (980/100)^{1/2} \approx 3$ rad/s, o $L = 1,0$ m, $\omega_0 \approx (9,8/1,0)^{1/2} \approx 3$ rad/s. La frecuencia es independiente de la masa M y de la amplitud θ_0 del movimiento, con tal que $\theta_0 \ll 1$. Obsérvese que no hay modo de que pueda entrar la masa en el segundo miembro de la Ec. (7.16) y siga tratándose de una magnitud con las dimensiones de una frecuencia.

Al establecer las Ecs. (7.5) y (7.13) hemos utilizado la ley de conservación de la energía. Obsérvese que cada una de éstas es una ecuación diferencial de primer orden y que hemos llevado a cabo una sola integración respecto al tiempo para obtener el resultado. La ecuación del movimiento [Ecs. (7.1) o (7.9)] es una ecuación diferencial de segundo orden como veremos a continuación. Para obtener el ángulo de desviación habremos de integrar dos veces con respecto al tiempo. Es conveniente recordar que el empleo explícito de la conservación de la energía puede ahorrarnos a veces trabajo matemático eliminando una integración.

Un tercer método de establecer la ecuación del movimiento para el péndulo es utilizar la igualdad entre el momento y la variación con el tiempo del momento cinético.

Tomemos el eje x normal al plano del movimiento (fig. 7.8). El momento respecto a este eje N_x debido a la gravedad, haciendo $F = Mg$,

$$N_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = LMg \sin \theta$$

El momento cinético J_x respecto al mismo punto es, con la cantidad de movimiento $p = ML \dot{\theta}$,

$$J_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x = -ML^2 \dot{\theta}$$

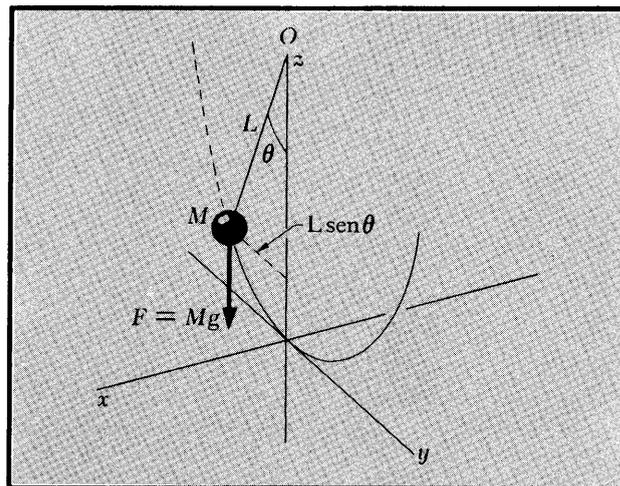


FIG. 7.8 El péndulo oscila en el plano yz . La fuerza debida a la gravedad sobre M es $F = Mg$, en la dirección $-z$. El momento N_x que aparece debido a esta fuerza es $MgL \sin \theta$, en la dirección $+x$, evaluada en el punto O .

en donde $\ddot{\theta}$ es positivo para valores crecientes de θ . Sabemos que la variación del momento cinético por unidad de tiempo es proporcional al momento de la fuerza:

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg\text{sen}\theta$$

de modo que la ecuación del movimiento del péndulo es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0$$

En el límite $\theta \ll 1$, podemos aproximar sustituyendo $\text{sen } \theta$ por θ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

que es justamente la Ec. (7.9).

CIRCUITO LC

Algunos de los ejemplos más importantes de sistemas oscilantes tienen lugar en electricidad. La familiaridad de la expresión *corriente alterna* (ca), que es una corriente eléctrica oscilante, muestra la importancia de este ejemplo. Aquellos alumnos que tengan conocimiento de los circuitos eléctricos, comprenderán fácilmente su relación con los sistemas mecánicos; los demás pueden omitir esta sección y quizás volver a ella cuando hayan estudiado el Cap. 8 del Vol. 2.

El voltaje en bornes de la capacidad C es

$$V_c = \frac{Q}{C}$$

en donde Q es la carga sobre la capacidad. La corriente en un circuito en serie con esta capacidad es

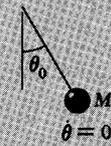
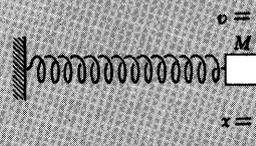
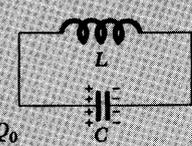
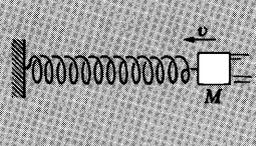
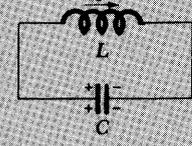
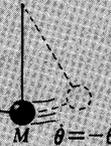
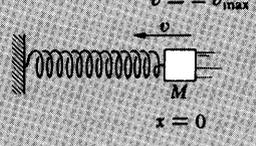
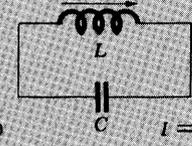
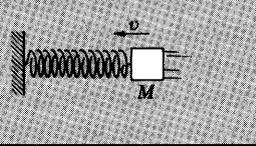
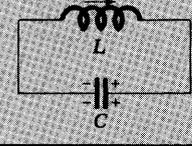
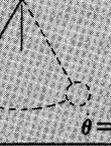
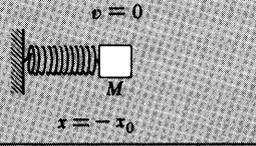
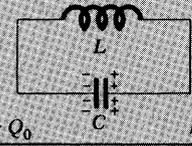
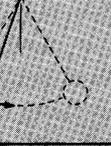
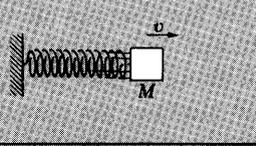
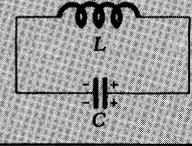
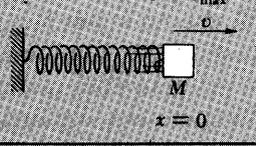
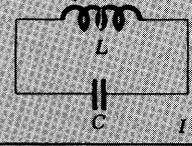
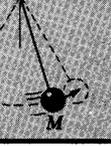
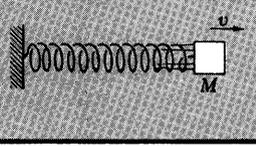
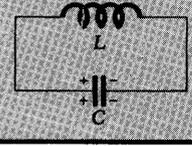
$$I = \frac{-dQ}{dt} \quad \text{o} \quad Q = - \int I dt$$

en donde el signo menos indica que la corriente fluye en aquella dirección en que disminuye la carga depositada sobre la capacidad. El voltaje en los extremos de la inducción L es

$$V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Si consideramos un circuito en el que hay sólo una capacidad y una inducción, como en la tercera columna de la fig. 7.9, y se

FIG. 7.9 Tres osciladores armónicos con el mismo período: un péndulo simple, un sistema muelle-masa y un circuito LC. El tiempo crece desde la figura A a la figura H; el ciclo siguiente empieza nuevamente en la situación A.

	Péndulo simple	Sistema muelle-masa	Circuito LC	Energía cinética E_c	Energía potencial U
A	$t = 0$  $\theta = \theta_0$ $\dot{\theta} = 0$	$v = 0$  $x = x_0$	 $Q = Q_0$ $I = 0$	—	
B	$t = \frac{\pi}{4\omega}$  M	 M	 I		
C	$t = \frac{\pi}{2\omega}$  M $\dot{\theta} = -\dot{\theta}_{max}$	$v = -v_{max}$  M $x = 0$	 $Q = 0$ $I = -I_{max}$		—
D	$t = \frac{3\pi}{4\omega}$  M	 M	 I		
E	$t = \frac{\pi}{\omega}$  M $\theta = -\theta_0$ $\theta = 0$	$v = 0$  M $x = -x_0$	 $Q = -Q_0$ $I = 0$	—	
F	$t = \frac{5\pi}{4\omega}$  M	 M	 I		
G	$t = \frac{3\pi}{2\omega}$  M $\theta = \theta_{max}$	$v = v_{max}$  M $x = 0$	 $Q = 0$ $I = I_{max}$		—
H	$t = \frac{7\pi}{4\omega}$  M	 M	 I		

recuerda que la suma de los voltajes a través del circuito es cero, resulta

$$-L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 = L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}$$

Esta es justamente la ecuación del desplazamiento de un muelle con

$$Q \leftrightarrow x \quad L \leftrightarrow M \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow C_{\text{muelle}}$$

La solución será

$$Q = Q_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 = \left(\frac{1}{LC} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.17)$$

y la corriente se deduce de la misma. La fig. 7.9 ilustra estas relaciones y las compara con un péndulo y una masa sobre un muelle.

Los alumnos familiarizados con la electricidad observarán la falta del voltaje RI , siendo R la resistencia. $RI = R dQ/dt$ y según nuestra correspondencia anterior ocuparán el lugar de una fuerza proporcional a dx/dt . Pero éste es justamente el tipo de fuerza de rozamiento que discutiremos más adelante y R se corresponde con el coeficiente b que relaciona la fuerza de rozamiento con la velocidad. Los casos de circuitos con L y R , con C y R y con L , R y C serán discutidos en el Vol. 2, Caps. 4, 7 y 8.

MOVIMIENTO DE SISTEMAS DESPLAZADOS DESDE UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE

Una de las razones de que el *movimiento armónico simple* (como se denomina este tipo de movimiento) sea tan importante es que para pequeños desplazamientos de cualquier sistema en equilibrio estable, el movimiento resultante, excepto en el caso de fuerzas de rozamiento, es armónico simple. En efecto, sea α la desviación del equilibrio, en donde α puede ser una distancia, un ángulo u otra coordenada más compleja. La condición de equilibrio estable requiere que para $\alpha = 0$, la energía potencial del sistema sea mínima y la fuerza (si α es una distancia) o el momento (si α es un ángulo) deben ser nulos. Así

$$F(\alpha = 0) = 0 = - \left(\frac{dU}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \quad (7.18)$$

donde U es la energía potencial.

Desarrollando en serie de Taylor,

Oscilador armónico: Propiedades y ejemplos

$$U(\alpha) = U_0 + \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right)_0 \alpha^3 \dots \quad (7.19)$$

en donde el subíndice 0 se refiere a $\alpha = 0$. Utilizando las Ecs. (7.18) y (7.19) y despreciando los términos en α^3 y superiores, ya que α es un número pequeño, resulta

$$U(\alpha) = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2$$

y

$$F(\alpha) = -\frac{dU}{d\alpha} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha \quad (7.20)$$

Naturalmente, no es necesario que F sea una fuerza, sino que puede ser un par u otra magnitud más complicada. Ahora, la condición de equilibrio estable es que

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} > 0$$

En la Ec. (7.20) esto significa que la fuerza tiende a volver el sistema a la condición $\alpha = 0$. La ecuación del movimiento del sistema será entonces

$$M \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha \quad (7.21)$$

en donde M es un término equivalente a la masa. La Ec. (7.21) indica que α describirá un movimiento armónico simple. Naturalmente, en la práctica es importante el rozamiento, pero en su ausencia el análisis anterior se aplica a un puente, un edificio, etc; ciertamente se aplica a todo sistema para el cual existe una función de energía potencial que posee un mínimo y es derivable.

ENERGÍA POTENCIAL Y CINÉTICA MEDIA

Vamos ahora a demostrar una característica importante del oscilador armónico relacionada con la media respecto al tiempo de las energías cinética y potencial. El valor medio respecto al tiempo de una magnitud K en el intervalo T es

$$\langle Ec \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt \quad (7.22)$$

Como el movimiento de un oscilador es repetitivo, el valor medio respecto al tiempo es el mismo en un período que en muchos períodos y es único. Utilizando el

período $T = 2\pi/\omega_0$, escribiremos para el valor medio de la energía cinética de un oscilador cuyo movimiento obedece a la ecuación $x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$

$$\langle Ec \rangle = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} M \dot{x}^2 dt}{T} = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2 \frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \phi) dt}{2\pi/\omega_0}$$

Como la integral se extiende a un período completo, no tiene importancia el valor que tenga la fase ϕ y puede convenientemente ponerse $\phi = 0$. Entonces, si escribimos $y = \omega_0 t$, tendremos

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 y dy = \frac{1}{2}$$

utilizando las relaciones

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 y dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 y dy$$

y

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 y + \cos^2 y) dy = 2\pi$$

Por tanto, se tiene para el valor medio de la energía cinética

$$\langle Ec \rangle = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \quad (7.23)$$

La energía potencial es (de nuevo con $\phi = 0$, ya que su valor no importa)

$$U = \frac{1}{2} C x^2 = \frac{1}{2} C A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Como el valor medio del cuadrado del seno es el mismo que el del cuadrado del coseno en un período* y como $\omega_0^2 = C/M$,

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} C A^2 = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \quad (7.24)$$

Así, pues, $\langle U \rangle = \langle Ec \rangle$ y la energía total del oscilador armónico es

$$E = \langle Ec \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2$$

(*) Esto puede verse fácilmente dibujando las dos curvas y observando que son idénticas cuando se defasan un cuarto de período. Este tipo de razonamiento puede aplicarse también al valor medio de $\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = R^2$. Como la esfera es simétrica respecto a x , y , z , se deberá tener $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} R^2$. Este resultado puede confirmarse por cálculo directo.

Oscilador armónico: Propiedades y ejemplos

Obsérvese que $E = \langle E \rangle$ porque la energía total es una constante del movimiento.

La igualdad de la energía cinética y potencial medias es una propiedad especial del oscilador armónico. Esta propiedad no se mantiene en general para los osciladores anarmónicos. Se demostrará más adelante que la poseen los osciladores débilmente amortiguados.

ROZAMIENTO

Hasta aquí hemos despreciado los efectos del rozamiento sobre el oscilador armónico. El rozamiento fue discutido en el Cap. 3, incluyendo sólo el caso de una fuerza de rozamiento constante. Trataremos ahora el caso de una fuerza que es proporcional a la primera potencia de la velocidad. Para pequeñas velocidades esto supone en muchos casos una buena aproximación y así encontramos que la solución para este tipo de fuerza retardatriz es realista. Sin embargo, consideremos en primer lugar algunos casos en los cuales sólo actúa esta fuerza. Así tenemos

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_{roz.} = -b \frac{dx}{dt} = -b\dot{x} \quad (7.25)$$

en donde b es una constante positiva llamada *coeficiente de amortiguamiento*. El signo negativo describe el hecho de que se trata de una fuerza siempre opuesta a la velocidad. A veces es útil definir una constante τ , llamada *tiempo de relajación*, por la relación

$$\tau = \frac{M}{b}$$

Según esto la Ec. (7.25) se transforma en

$$M \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

Vemos que τ tiene las dimensiones de un tiempo, ya que b posee las dimensiones de una fuerza dividida por una velocidad o simplemente masa dividida por tiempo. La razón del nombre *tiempo de relajación* la veremos más adelante.

En función de la velocidad $v = dx/dt = \dot{x}$, esta ecuación se reduce a

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau} v = 0$$

La solución viene dada al final del capítulo (pág. 241). Es

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad (7.26)$$

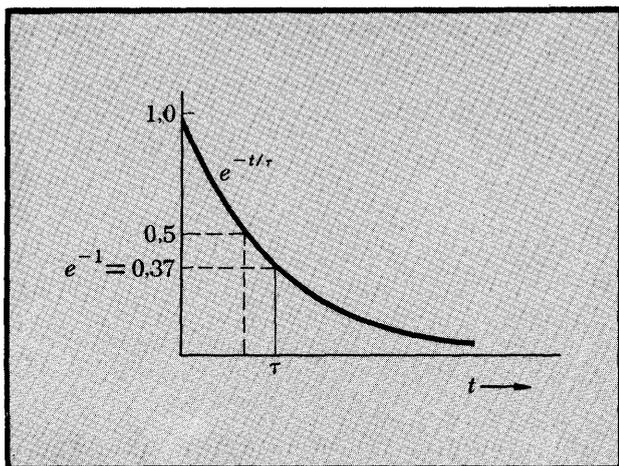


FIG. 7.10 La función $e^{-t/\tau}$ representada en función de t . Obsérvese que $e^{-0.69} = 0.5$ y, por tanto, la función decrece a la mitad de su valor inicial para $t = 0.69\tau$.

en donde v_0 es la velocidad para $t = 0$. La velocidad disminuye exponencialmente con el tiempo; diremos que la velocidad está amortiguada con una constante de tiempo τ . El comportamiento está representado en la figura 7.10.

La disminución de la energía cinética Ec de una partícula libre viene dada según la Ec. (7.26) por

$$Ec = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 e^{-2t/\tau} = Ec_0 e^{-2t/\tau} \quad (7.27)$$

Vemos al diferenciar (7.27) que

$$\dot{Ec} = -\frac{2}{\tau} Ec$$

El tiempo de relajación efectivo para la energía cinética es la mitad que para la velocidad.

¿Qué clase de mecanismo conduce a una fuerza amortiguadora de la forma $-b\dot{x}$? El caso de una esfera que se mueve lentamente a través de un medio viscoso fue resuelto por vez primera por G. G. Stokes y la expresión de la fuerza

$$F_{roz} = -6\pi\eta r v \quad (7.28)$$

en donde r es el radio de la esfera y η el coeficiente de viscosidad se denomina *ley de Stokes*.

Una buena representación de la fuerza amortiguadora $F_{roz} = -b\dot{x}$ es la que corresponde a una lámina plana que se mueve en dirección normal a su plano a través de un gas a presión muy baja, como indica la fig. 7.11, con tal que la velocidad V de la placa sea mucho menor que la velocidad media v de las moléculas del gas. La presión debe ser lo suficientemente baja para que podamos despreciar los choques de las moléculas entre sí. El número de moléculas que por unidad de tiempo golpean la placa es proporcional a la velocidad relativa a la placa de las moléculas que inciden sobre aquella. Supongamos que las moléculas se mueven únicamente en una dirección. Respecto a una de las caras de la placa la velocidad relativa es $v + V$; respecto a la otra, es $v - V$. La presión es proporcional al número de moléculas que por unidad de tiempo golpean multiplicado por la transferencia media de cantidad de movimiento por molécula. Esta transferencia es por sí misma proporcional a la velocidad relativa, de modo que las presiones P_1, P_2 sobre las dos caras de la placa son

$$P_1 \propto (v + V)^2 \quad P_2 \propto (v - V)^2$$

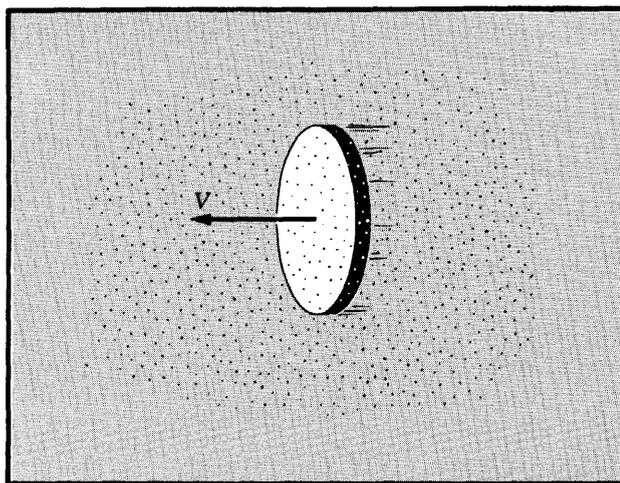


FIG. 7.11 Una placa plana que se mueve normalmente a su plano a través de un gas que está a presión muy baja, está sometida a una fuerza retardadora proporcional a su velocidad V , si ésta es mucho menor que la velocidad media de las moléculas del gas.

La presión resultante es la diferencia de presiones sobre las caras opuestas de la placa

$$P = P_1 - P_2 \propto 4vV$$

de modo que la resistencia al avance (fuerza neta sobre la placa móvil) es directamente proporcional a la velocidad V de la misma. Puede verse que dicha resistencia se opone al movimiento de la placa.

Velocidad límite. Si una fuerza constante tal como la gravedad se aplica a una partícula bajo la acción de una fuerza de rozamiento como la discutida anteriormente, la velocidad se incrementará si la partícula parte del reposo (o con pequeña velocidad) o decrecerá si parte a velocidad muy grande hasta que la aceleración se anula. Esta condición es

$$F_{\text{const}} = b\dot{x} \quad \text{o} \quad \dot{x} = v = \frac{F_{\text{const}}}{b} \quad (7.29)$$

y la velocidad así alcanzada se denomina *velocidad límite*. Por ejemplo, si una partícula de masa M cae bajo la acción de la gravedad y de una fuerza que sigue la ley de Stokes, la velocidad límite es

$$v = \frac{Mg}{6\pi\eta r}$$

(Véanse Probs. 10 y 11 al final del capítulo.)

El concepto de velocidad límite es aplicable a problemas que incluyen fuerzas de rozamiento proporcionales a otras potencias de la velocidad que, a menudo, ocurren a velocidades más elevadas. Si la fuerza de rozamiento viene dada por

$$F_{\text{roz}} = -c\dot{x}^n$$

en donde c es una constante y n positivo, la velocidad límite será

$$v = \left(\frac{F_{\text{const}}}{c} \right)^{1/n}$$

OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

Volvamos ahora al oscilador, al que incluimos la fuerza amortiguadora $-b\dot{x}$. Este tipo de movimiento se indica en la fig. 7.12. La ecuación del movimiento es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0$$

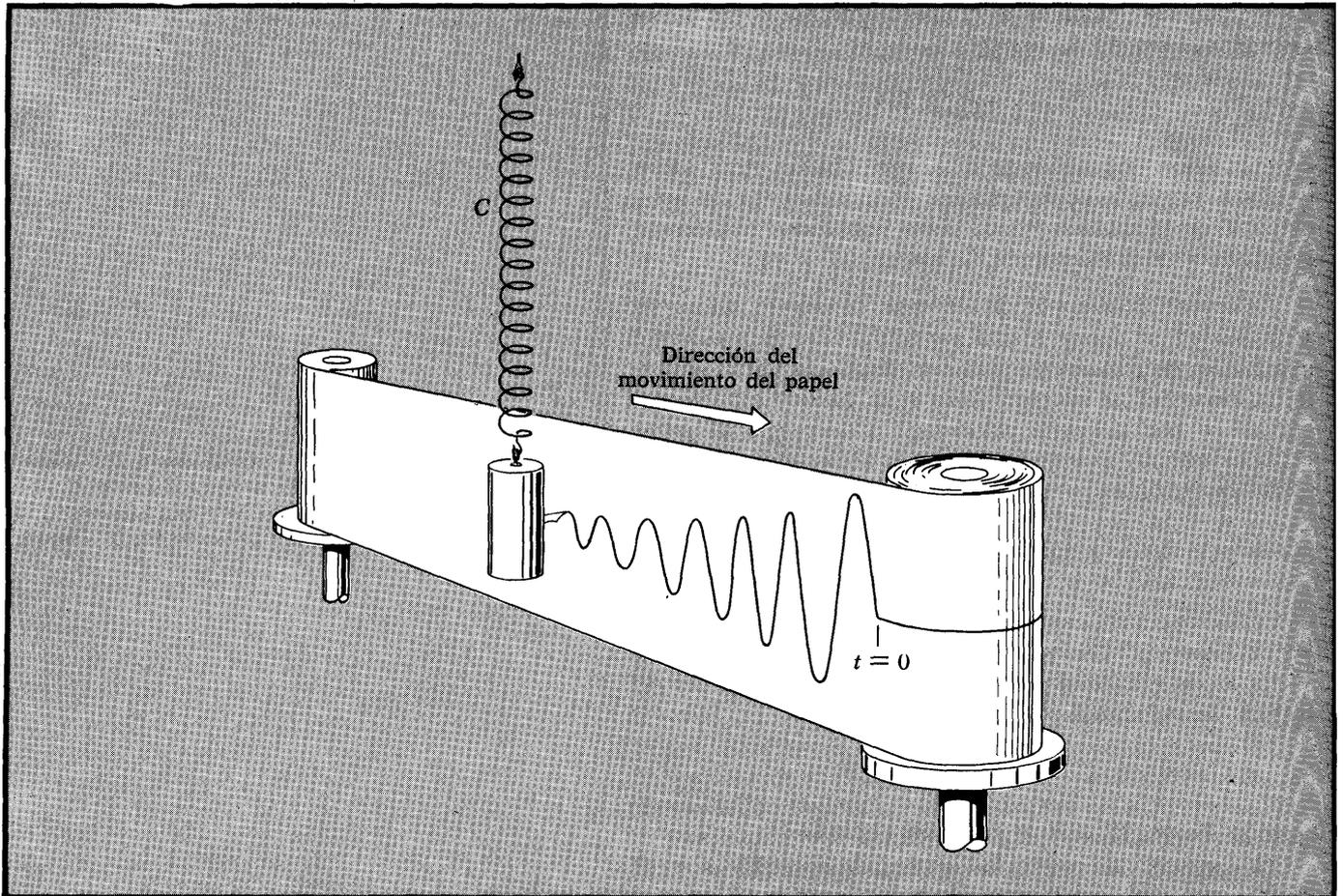


FIG. 7.12 Todos los osciladores armónicos reales están amortiguados por fuerzas de rozamiento, como la resistencia del aire. Un sistema muelle-masa con un amortiguamiento débil describe una curva de este tipo sobre la cinta de papel que se mueve a velocidad constante si el sistema muelle-masa estaba oscilando originalmente en $t = 0$.

Esta es todavía una solución lineal, que puede escribirse en la forma

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.30)$$

en donde

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{M}$$

Busquemos soluciones a la Ec. (7.30) en la forma de oscilaciones sinusoidales amortiguadas.

$$x = x_0 e^{-\beta t} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (7.31)$$

en donde han de determinarse β y ω , siendo x_0 y ϕ las constantes que han de determinarse por las condiciones

Oscilador armónico: Propiedades y ejemplos

iniciales *. Esta solución resulta de combinar las ecuaciones (7.2) y (7.26). Los detalles de la solución vienen dados en las Notas Matemáticas al final de este capítulo, en donde se demuestra que

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \quad (7.32)$$

y

$$\omega = \left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.33)$$

El rozamiento disminuye la frecuencia, de modo que ω es igual a ω_0 únicamente si el tiempo de relajación es infinito (sin amortiguamiento).

Introduciendo estos valores de β y ω en la Ec. (7.31) obtenemos

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \text{sen} \left\{ \omega_0 t \left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \phi \right\}$$

Si $\omega_0 \tau \gg 1$, tenemos el límite de *amortiguamiento débil*, en el que x puede aproximarse por

$$x \approx x_0 e^{-t/2\tau} \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \quad (7.34)$$

en donde ω_0 es la frecuencia natural de las oscilaciones no amortiguadas.

EJEMPLO

Disipación de potencia. Calculemos la energía disipada por unidad de tiempo por un oscilador armónico amortiguado, en el límite de amortiguamiento débil con $\omega_0 \tau \gg 1$, de modo que $\omega \cong \omega_0$.

La energía cinética es $Ec = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$. A partir de la solución aproximada (7.34) tendremos (haciendo $\phi = 0$)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\tau} x_0 e^{-t/2\tau} \text{sen} \omega_0 t + \omega_0 x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t \quad (7.35)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \text{sen}^2 \omega_0 t + \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \cos^2 \omega_0 t \\ &\quad - \left(\frac{\omega_0}{\tau} \right) x_0^2 e^{-t/\tau} \text{sen} \omega_0 t \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (7.36)$$

[*] La solución [Ec. (7.31)] no es válida para todos los valores de ω_0 y τ . En las Notas Matemáticas podrá verse que, bajo ciertas condiciones, la solución no es oscilatoria. Si $\omega_0^2 < (1/2\tau)^2$, la solución es $e^{-t/2\tau} (Ae^{\sigma t} + Be^{-\sigma t})$, en donde A y B son constantes arbitrarias y $g = [(1/2\tau)^2 - \omega_0^2]^{\frac{1}{2}}$; mientras que si $\omega_0 = 1/2\tau$, la solución es $Ce^{-t/2\tau} + Dte^{-t/2\tau}$, en donde C y D son constantes arbitrarias. Este último caso es «críticamente amortiguado». Véanse las Ecs. (7.69) y (7.70).

Las integrales que aparecen cuando tomamos la media respecto al tiempo de la ecuación (7.36) vienen dadas por Dwight, 861.13 a 861.15. Pero para $\omega_0\tau \gg 1$, constituye una aproximación bastante aceptable para sacar fuera de los corchetes angulares, que designan la media en el tiempo, el factor $e^{-t/\tau}$. Podemos hacerlo con razonable aproximación si la amplitud de la oscilación $x_0 e^{-t/2\tau}$ no cambia mucho en un ciclo del movimiento. Nos aparecen ahora las medias:

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \text{sen}^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \cos \theta \text{sen} \theta \rangle = 0$$

La última media, que es nueva para nosotros, es de considerable importancia:

$$\langle \cos \theta \text{sen} \theta \rangle = \langle \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \rangle = 0$$

porque la media de un seno o coseno es cero. Entonces la energía cinética promediada a lo largo del tiempo de un ciclo es

$$\begin{aligned} \langle Ec \rangle &\approx \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \langle \text{sen}^2 \omega_0 t \rangle + \omega_0^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_0}{\tau} \langle \cos \omega_0 t \text{sen} \omega_0 t \rangle \right] x_0^2 e^{-t/\tau} \\ &\approx \frac{1}{4} M \left[\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 + \omega_0^2 \right] x_0^2 e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

pero $(1/2\tau)^2$ se supone que es despreciable en comparación con ω_0^2 , de modo que la energía cinética media es

$$\langle Ec \rangle \approx \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \quad (7.37)$$

Vemos que la energía cinética media disminuye exponencialmente. La energía potencial media es (véase fig. 7.13.)

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 x_0^2 \langle e^{-t/\tau} \text{sen}^2 \omega_0 t \rangle \approx \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \quad (7.38)$$

La disipación media de potencia P viene dada por la variación de energía por unidad de tiempo con signo negativo:

$$-\langle P \rangle = \frac{d}{dt} \langle E \rangle \approx \frac{d}{dt} (\langle Ec \rangle + \langle U \rangle) \approx -\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \right)$$

o

$$\langle P(t) \rangle = \frac{\langle E(t) \rangle}{\tau} \quad (7.39)$$

Omitiremos normalmente los paréntesis $\langle \rangle$ en $P(t)$ cuando su significado sea claro.

El alumno puede sorprenderse de que las medias expresadas en (7.37) y (7.38) contengan el tiempo t , cuando estas medias son respecto al tiempo. Estamos observando el movimiento de un oscilador amortiguado a lo largo de muchos ciclos y lo que tenemos aquí es la *energía* (cinética o potencial) *media* (en un ciclo) *expresada para un tiempo dado* t . Como la energía se está disipando en forma de calor, es de esperar que la energía

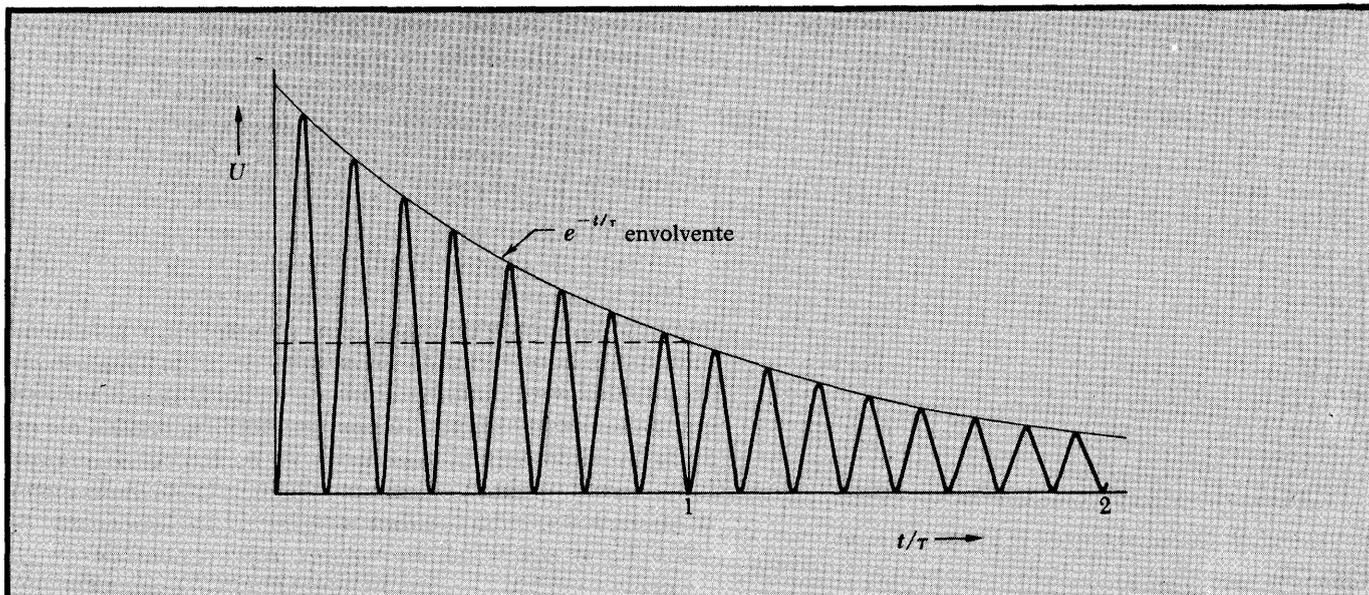


FIG. 7.13 Energía potencial de un oscilador con $\tau=8\pi/\omega$ y Q de 8π representada en función del tiempo. En el tiempo τ , en el que se verifican cuatro oscilaciones, la envolvente de la oscilación decrece hasta $1/e$ de su valor inicial.

media (en un ciclo) disminuya según se van completando más ciclos.

Es de suponer que la disipación de potencia sea igual al trabajo que en valor medio realiza la fuerza de rozamiento $F_{roz} = -b\dot{x} = -(M/\tau)\dot{x}$ [ecuación (7.30)], por unidad de tiempo, con signo menos. Utilizando (7.35) y suponiendo que $\omega_0 \tau \gg 1$, de modo que $e^{-t/\tau}$ puede sacarse fuera de los $\langle \rangle$, esta potencia media es

$$\begin{aligned} \langle F_{roz} v \rangle &\approx -\frac{M}{\tau} \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle \\ &\approx -\frac{1}{2\tau} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \approx -\frac{E(t)}{\tau} \end{aligned}$$

de acuerdo con la ecuación (7.39).

Factor de calidad Q . El factor de calidad Q de un sistema oscilante es un término que se utiliza muy corrientemente en la terminología de los sistemas eléctricos de corriente alterna, pero se aplica a todos los sistemas oscilantes en tanto el amortiguamiento sea pequeño. Q se define como 2π veces la razón entre la energía almacenada y la pérdida media de energía por período:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía almacenada}}{\langle \text{pérdida de energía en un período} \rangle} = \frac{2\pi E}{P/f} = \frac{E}{P/\omega} \quad (7.40)$$

TABLA 7.2 Diversos valores de Q . (Lógicamente presenta amplias variaciones)

La Tierra, para ondas sísmicas	250-1 400
Resonador de microondas de cavidad de cobre	10^4
Cuerda de piano o de violín	10^3
Atomo excitado	10^7
Núcleo excitado (Fe^{57})	3×10^{12}

puesto que el período es $1/f$ y $2\pi f = \omega$. El tiempo correspondiente a un radián de movimiento es $1/\omega$. El amortiguamiento debe ser suficientemente pequeño para que E no cambie apreciablemente en un período. Obsérvese que Q carece de dimensiones. Para el oscilador armónico débilmente amortiguado ($\omega_0 \tau \gg 1$) tenemos,

$$Q \approx \frac{E}{E/\omega\tau} \approx \omega_0\tau \quad (7.41)$$

según la Ec. (7.39). Vemos que el valor $\omega_0 \tau$ es ciertamente una buena medida de la falta de amortiguamiento de un oscilador. Valores altos $\omega_0 \tau$ o de Q quieren decir que el oscilador está poco amortiguado. Obsérvese a partir de la Ec. (7.38) que la energía de un oscilador disminuye hasta e^{-1} de su valor inicial en el tiempo τ ; durante dicho tiempo el oscilador realiza $\omega_0 \tau/2\pi$ oscilaciones. En la tabla 7.2 se dan diversos valores representativos de Q .

OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO

El caso de un oscilador armónico forzado por la acción de una fuerza sinusoidalmente variable es de una gran importancia en muchos problemas de física. A causa de la complejidad del problema se trata en los Temas Avanzados (al final del capítulo). Sin embargo, expondremos aquí algunos resultados dignos de mención.

1. Como es lógico, el movimiento estacionario (una vez el rozamiento ha amortiguado todo movimiento correspondiente al período natural del oscilador forzado, $t \gg \tau$) tiene la misma frecuencia que la fuerza impulsora.

2. Como también es lógico, particularmente para el oscilador ligeramente amortiguado, la amplitud del movimiento estacionario depende fundamentalmente de la frecuencia impulsora, siendo grande cuando está próxima a la frecuencia natural. La fig. 7.14 muestra la amplitud como una función de la frecuencia impulsora para valores grandes y medios de Q . Obsérvese que la amplitud máxima tiene lugar a

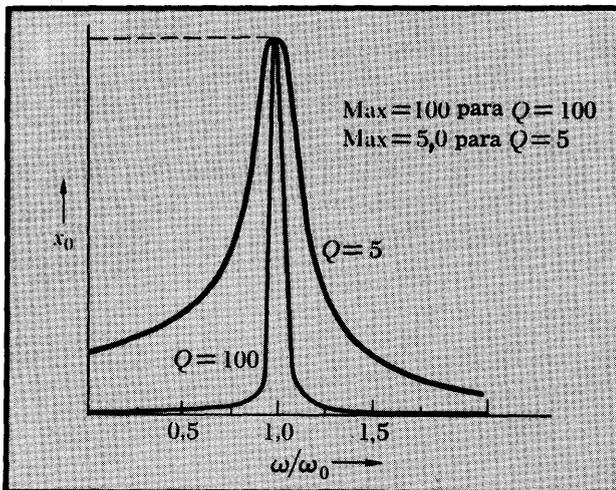


FIG. 7.14 Amplitud del movimiento armónico forzado en función de la frecuencia impulsora. El valor máximo de x_0 tiene lugar para $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ y cae bruscamente para un valor ligeramente inferior a 1,0 de abscisa. La escala de amplitudes es puramente arbitraria y para la misma fuerza impulsora e igual valor de ω_0 la amplitud máxima para $Q = 100$ será 20 veces el valor correspondiente a $Q = 5$.

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2\omega_0^2 \tau^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

que es muy próximo a ω_0 para un oscilador con Q elevada. La máxima absorción de potencia ocurre para

$\omega = \omega_0$. El tipo de curva indicado se suele denominar *curva de resonancia* *.

3. La deriva en el tiempo, expresada por el ángulo ϕ comprendido entre el desplazamiento $x = x_0 \sin(\omega t + \phi)$ y la fuerza impulsora variable según $\sin \omega t$ es también una función importante de la frecuencia impulsora, siendo 0 para bajas frecuencias y $-\pi$ para frecuencias elevadas. (Véase fig. 7.15 y el Tema Avanzado al final del capítulo.) El ángulo se define aquí como aquel en el cual el desplazamiento alcanza su máximo antes que la fuerza descrita por $F_0 \sin \omega t$. Los ángulos negativos, por tanto, significan que la oscilación del desplazamiento va retrasada respecto a la oscilación de la fuerza. Obsérvese que cuando $\omega = \omega_0$, $\phi = -\pi/2$, el desplazamiento está retrasado respecto a la fuerza en un cuarto de ciclo. Para más detalles, véanse los Temas Avanzados al final del capítulo.

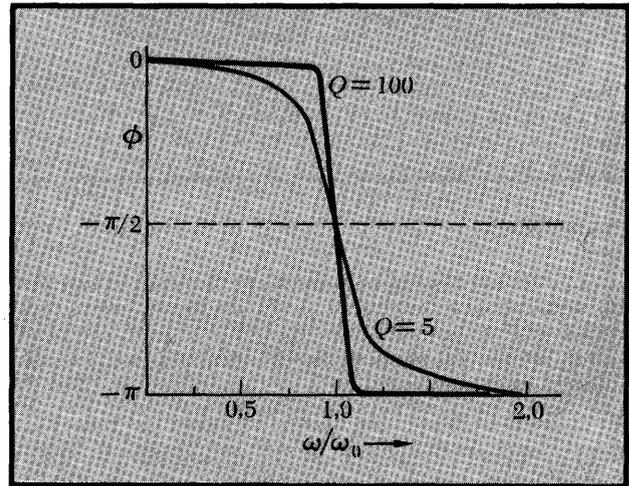


FIG. 7.15 Ángulo ϕ entre el desplazamiento y la fuerza impulsora.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Una propiedad importante del oscilador armónico es que las soluciones son aditivas: Si $x_1(t)$ es el movimiento bajo la acción de la fuerza impulsora $F_1(t)$, y $x_2(t)$ es el movimiento bajo la fuerza impulsora $F_2(t)$, entonces $x_1(t) + x_2(t)$ es el movimiento bajo la fuerza combinada $F_1(t) + F_2(t)$. Esto es, si conocemos el movimiento x_1 bajo la acción únicamente de F_1 y el movimiento x_2 debido a sólo F_2 , se obtiene entonces el movimiento bajo la acción de las fuerzas combinadas sumando x_1 y x_2 . Esta propiedad se deduce directamente de la ecuación del movimiento

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) (x_1 + x_2) \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_2 \quad (7.42) \\ &= F_1 + F_2 \end{aligned}$$

La validez del principio de superposición para las soluciones de la ecuación del oscilador armónico es una consecuencia de ser una ecuación lineal; únicamente interviene la primera potencia de x . El resultado es muy diferente cuando se incluyen términos anarmónicos. Un término en x^2 en la ecuación del movimiento interviene mezclando y multiplicando dos frecuencias impulsoras

(*) En algunos campos, la curva de resonancia es estrictamente $f(X) = 1/(1 + X^2)$, que es de apariencia semejante.

simultáneas ω_1 y ω_2 , produciendo por ello una serie completa de frecuencias armónicas ($2\omega_1, 3\omega_1, \dots, 2\omega_2, 3\omega_2, \dots$) y de frecuencias combinadas o «laterales» ($\omega_1 + \omega_2$; $\omega_1 - \omega_2$; $\omega_1 - 2\omega_2$; etc.).

PROBLEMAS

1. *Péndulo simple.* Se construye un péndulo con un hilo de poco peso y longitud $L = 100$ cm y una masa pesada $M = 1 \times 10^3$ g.

(a) ¿Cuál es el período del péndulo para desplazamientos pequeños? *Sol.* 2,0 s.

2. *Masa sujeta a un muelle.* Escribir la ecuación del movimiento de una masa M que se mueve en línea vertical bajo la acción de la gravedad y de un muelle de constante C . ¿Cuál es el efecto de la gravedad sobre:

(a) El período de oscilación?

(b) El centro de oscilación o punto alrededor del cual tiene lugar la oscilación?

3. *Masa sujeta a un muelle.* Se suspende de un muelle longitudinal, cuya constante de fuerza es $C = 1 \times 10^6$ dinas/cm, una masa de $1,0 \times 10^3$ g.

(a) ¿Cuál es el período para pequeñas oscilaciones?

(b) Si para $t = 0$ el desplazamiento del equilibrio es + 0,5 cm y la velocidad + 15 cm/s, determinar el desplazamiento en función de t .

4. *Masa sujeta a un muelle. Datos.* Los datos relacionados a continuación (tablas 7.3 y 7.4) se obtuvieron observando el movimiento de una masa sujeta al extremo de un muelle:

(a) Representar el cuadrado del período de oscilación en función de la masa. Los valores tabulados de la masa no tienen en cuenta la masa del muelle. Determinar la masa efectiva del muelle extrapolando adecuadamente el gráfico.

(b) Determinar la constante del muelle C .

(c) Representar el logaritmo neperiano de la amplitud en función del tiempo y determinar el tiempo de relajación.

(d) Determinar el coeficiente de amortiguamiento b .

5. *Masa en un medio fluido.* Un cuerpo parcialmente (o totalmente) sumergido en un líquido es impulsado hacia arriba por la acción de una fuerza igual al peso del líquido desplazado (principio de Arquímedes). Demostrar que un cuerpo de sección transversal horizontal uniforme restringido a moverse verticalmente en un líquido de mayor densidad que la suya experimentará oscilaciones armónicas simples. ¿Cuál es el período de estas oscilaciones? ¿Cuál es el límite de amplitud de las oscilaciones?

6. *Péndulo*

(a) Un péndulo de longitud 39,2 cm y masa 500 g se pone en movimiento de modo que para $t = 0$, $\theta = 0,1$ y

TABLA 7.3 Período en función de la masa

Masa, g	Períodos observados, s
50	0,72
100	0,85
150	0,96
200	1,06
250	1,16
300	1,23

TABLA 7.4 Amplitud de vibración en función del tiempo para una masa de 150 g

Tiempo, s	Amplitud, cm
0	4,5
30	4,0
80	3,5
125	3,0
180	2,5
235	2,0
340	1,5
455	1,0

$\dot{\theta} = -0,02/s$. Determinar θ en función de t . Utilizar ahora las ecuaciones del movimiento para determinar la fuerza que actúa sobre la masa para $\theta = 0$.

(b) El péndulo de Foucault fue montado por Foucault en París el año 1851 para mostrar el efecto de la rotación de la Tierra (véase Cap. 4, pág. 120). Su longitud es de 69 m. Determinar el período. Si la masa es de 28 kg y la oscilación máxima de 10° , calcular la energía total del movimiento.

7. *Energía de una masa sujeta a un muelle.* Una masa de 50 g sujeta al extremo de cierto muelle ejercita un movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación $x = 2 \sin 10t$, donde x está expresada en cms. y t en segundos.

- (a) Determinar la constante C de muelle.
- (b) Determinar la energía cinética máxima.
- (c) ¿Cuál es la energía potencial máxima y la energía total?

8. *Oscilador bidimensional.* Una partícula tiene la libertad de moverse en el plano xy bajo la acción de una fuerza dirigida hacia el origen de magnitud $-C(x\hat{x} + y\hat{y}) = -Cr$. Llamando M a la masa, determinar las ecuaciones x e y del movimiento y resolverlas.

- (a) ¿Cuáles son las condiciones para el movimiento en un círculo y cuál es el período?
- (b) ¿Cuáles son las condiciones para el movimiento a lo largo de la línea de 45° con el eje x y cuál es el período?

9. *Masa en una cápsula esférica.* Una masa se desliza libremente en el fondo de una cápsula esférica de radio 1,0 m. Determinar el período para pequeñas oscilaciones. ¿Cuál es la longitud del péndulo equivalente?

10. *Viscosidad*

- (a) Buscar en un libro de consulta para dar y explicar la definición de viscosidad.
- (b) ¿Cuáles son las dimensiones del coeficiente de viscosidad η ?

- (c) ¿Cuál es el valor de la viscosidad del agua a $20^\circ C$?
- (d) Evaluar (b) [véase ecuación (7.28)] para una esfera de radio 5 cm en un medio de viscosidad 2,0 centipoises. (Véase Prob. 13.)
- (e) Si en (d) la densidad de la esfera es 2,7 g/cc y la densidad del líquido es 1,1 g/cc, determinar la velocidad límite. Utilizar la fuerza neta vertical, como se explicó en el Prob. 5, y el tiempo de relajación.

11. *Movimiento bajo una fuerza viscosa*

- (a) Una partícula de masa M sobre la que actúa sólo la fuerza viscosa del medio $-bv$ es proyectada desde un punto con velocidad v_0 . Escribir la velocidad en función del tiempo. Recordar que $v = dx/dt$ y determinar $x(t)$. Si $M = 10$ g, $b = 4,0$ din-s/cm y $v_0 = 100$ cm/s, determinar la distancia que recorrerá la masa.
- (b) En el experimento de la gota de aceite de Millikan, algunas gotas tenían $2,0 \times 10^{-4}$ cm de radio. La densidad del aceite era 0,92 g/cc y la viscosidad del aire, $1,8 \times 10^{-4}$ centipoises. Determinar el tiempo de relajación y la velocidad límite. Despreciar la corrección por el empuje hidrostático.

12. *Tiempo de relajación.* Un oscilador tiene una masa de $M = 10$ g, $C = 490$ dinas/cm, $b = 1,0$ dina-s/cm. Para $t = 0$, $x = 2,0$ cm, $\dot{x} = 0$:

- (a) Determinar x en función de t .
- (b) ¿Cuál es el tiempo de relajación para x ?, ¿y para E ?
- (c) ¿Cuánto vale Q ?

13. *Oscilador amortiguado.* Una bola esférica de radio 0,30 cm y masa 0,5 g se mueve en agua bajo la acción de un muelle de constante $C = 50$ dinas/cm; η para el agua es $1,0 \times 10^{-2}$ dina-s/cm² o *poises*. Determinar el número de oscilaciones que tendrán lugar en el tiempo necesario para que la amplitud descienda a la mitad del valor inicial. (Obsérvese que $e^{-0,693} = \frac{1}{2}$). ¿Cuál es el valor Q del oscilador?

TEMAS AVANZADOS

Oscilador anarmónico. Siguiendo la discusión expuesta en páginas anteriores, consideremos ahora un péndulo que está oscilando con una amplitud tan grande que no podemos despreciar el término θ^3 en el desarrollo de $\sin\theta$, como hicimos anteriormente en (7.9) ¿Cuál es el efecto sobre el movimiento del péndulo del término en θ^3 ? Hemos visto el efecto sobre el período en la Tabla 7.1. Veamos cómo se puede abordar analíticamente este problema.

Los problemas anarmónicos o no lineales son normalmente difíciles de resolver exactamente (a no ser mediante computadores), pero las soluciones aproximadas son con

frecuencia suficientes para darnos una buena idea de lo que sucede. La ecuación (7.8) nos da:

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$$

de modo que la ecuación del movimiento (7.7) hasta este orden se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0 \tag{7.43}$$

en donde la magnitud g/L se ha designado por ω_0^2 . Esta es la ecuación del movimiento de un *oscilador anarmónico*.

Veamos si podemos encontrar una solución aproximada a (7.43) de la forma

$$\theta = \theta_0 \text{sen} \omega t + \epsilon \theta_0 \text{sen} 3\omega t \quad (7.44)$$

en donde ϵ es una constante adimensional que debe cumplir la condición de ser mucho menor que 1 cuando $\theta_0 \ll 1$. Es decir, veamos si el movimiento puede representarse aproximadamente (o exactamente, ¡no lo sabemos aún!), por la superposición de dos movimientos diferentes, uno en $\text{sen } \omega t$ y el otro en $\text{sen } 3\omega t$. La presencia de este último término se sugiere por la identidad trigonométrica (Dwight 403.03):

$$\text{sen}^3 x \equiv \frac{3}{4} \text{sen} x - \frac{1}{4} \text{sen} 3x \quad (7.45)$$

Así, pues, el término en θ^3 de la ecuación diferencial (7.43) generará a partir del cubo de $\text{sen } \omega t$ un término en $\text{sen } 3\omega t$. Para satisfacer la ecuación diferencial nos vemos obligados a añadir al término $\text{sen } \omega t$ otro de la forma $\epsilon \text{sen } 3\omega t$ que pueda justamente contrarrestar el término en $\text{sen } 3\omega t$ producido por θ^3 . Prosiguiendo de este modo, el nuevo término $\epsilon \text{sen } 3\omega t$ en la solución de tanteo producirá, al ser elevado al cubo, un término en $\epsilon^3 \text{sen } 9\omega t$ y así sucesivamente. No hay ninguna razón aparente por la que deba detenerse el proceso, pero si $\epsilon \ll 1$ puede esperarse que converja rápidamente porque cada vez intervienen potencias más elevadas de ϵ como factores en los términos de frecuencias mayores. Es ahora evidente que (7.44) únicamente puede ser una solución aproximada en el mejor de los casos. Nos falta determinar ϵ y también ω ; mientras que ω debe reducirse a ω_0 para pequeñas amplitudes, puede diferirse en el caso de amplitudes mayores. Para mayor sencillez supondremos que $\theta = 0$ para $t = 0$.

Una solución aproximada de este tipo correspondiente a una ecuación diferencial se denomina *solución de perturbación*, porque un término en la ecuación diferencial perturba el movimiento que se tendría sin el citado término. Como hemos visto, llegamos a obtener (7.44) mediante un trabajo de deducción orientado. Es fácil probar con varias soluciones de tanteo semejantes y rechazar las que no resulten.

Tenemos a partir de (7.43)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\omega^2 \theta_0 \text{sen} \omega t - 9\omega^2 \epsilon \theta_0 \text{sen} 3\omega t \\ \theta^3 &= \theta_0^3 (\text{sen}^3 \omega t + 3\epsilon \text{sen}^2 \omega t \text{sen} 3\omega t + \dots) \end{aligned}$$

en donde hemos descartado los términos de orden ϵ^2 y ϵ^3 porque suponemos que podemos encontrar una solución en la que $\epsilon \ll 1$. Entonces los términos de (7.43) se reducen, utilizando la identidad trigonométrica (7.45), a

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\omega^2 \theta_0 \text{sen} \omega t - 9\omega^2 \epsilon \theta_0 \text{sen} 3\omega t \\ \omega_0^2 \theta &= -\omega_0^2 \theta_0 \text{sen} \omega t + \omega_0^2 \epsilon \theta_0 \text{sen} 3\omega t \\ -\frac{1}{6} \omega_0^2 \theta^3 &= -\frac{3\omega_0^2}{24} \theta_0^3 \text{sen} \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} \theta_0^3 \text{sen} 3\omega t \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{2} \theta_0^3 \epsilon \text{sen}^2 \omega t \text{sen} 3\omega t \end{aligned} \quad (7.46)$$

Sumemos ahora miembro a miembro los términos de (7.46). La suma del primer miembro es igual a cero de acuerdo con (7.43). Si (7.44) ha de ser solución aproximada para cualquier valor del tiempo t , es necesario que los coeficientes de $\text{sen } \omega t$ y $\text{sen } 3\omega t$ se anulen separadamente en el miembro de la derecha de (7.46). Pues si suponemos que los coeficientes no se anulan, deberemos tener entonces una expresión de la forma $A \text{sen } \omega t + B \text{sen } 3\omega t = 0$, siendo A y B constantes. Pero una ecuación de este tipo *no puede* satisfacerse para todos los valores de t , de modo que A y B deberán ser nulos. Al limitar nuestra solución supuesta (7.44) a $3\omega t$ no hemos incluido todos los términos o frecuencias que pueden presentarse pero hemos incluido los más importantes.

El requisito de que los coeficientes de $\text{sen } \omega t$ en (7.46) deben sumar cero es equivalente a

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \theta_0^2 &= 0 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 (1 - \frac{1}{8} \theta_0^2) \quad \omega \approx \omega_0 (1 - \frac{1}{16} \theta_0^2) \end{aligned} \quad (7.47)$$

utilizando el desarrollo binómico para la raíz cuadrada. (Véase Cap. 2. Notas Matemáticas.) La ecuación (7.47) da la dependencia de ω en función de θ_0 . Aquí ω_0 es el límite de ω , cuando $\theta_0 \rightarrow 0$; es decir, el límite de amplitud pequeña. Para $\theta_0 = 0,3$ radianes, la desviación fraccionaria o unitaria de la frecuencia es $\Delta\omega/\omega \approx -10^{-2}$, en donde $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$. Obsérvese que la frecuencia del péndulo para grandes amplitudes depende de la amplitud.

La solución (7.44) también contiene un término en $\text{sen } 3\omega t$. La amplitud de este término respecto a la amplitud del término en $\text{sen } \omega t$ es ϵ , que se determina por la condición de que el coeficiente del término en $\text{sen } 3\omega t$ en la suma de (7.46) se anule:

$$-9\omega^2 \epsilon + \omega_0^2 \epsilon + \frac{\omega_0^2}{24} \theta_0^2 = 0$$

Si ponemos $\omega^2 \approx \omega_0^2$, entonces esta ecuación se reduce a

$$\epsilon \approx \frac{\theta_0^2}{192}$$

Consideremos que ϵ nos da el ingrediente fraccionario del término en $\text{sen } 3\omega t$ en una solución de θ dominada por el término $\text{sen } \omega t$. Para $\theta_0 = 0,3$ radianes, tendremos $\epsilon \approx 10^{-3}$ que es muy pequeño. El coeficiente del término $\text{sen}^2 \omega t \text{sen } 3\omega t$ en (7.46) es pequeño en un factor $O(\epsilon)$ u $O(\theta_0^2)$, comparado con los términos que hemos utilizado. Hemos despreciado dicho término en nuestra aproximación.

¿Por qué no hemos incluido en (7.44) un término en $\text{sen } 2\omega t$? Pruebe el lector una solución de la forma

$$\theta = \theta_0 \text{sen} \omega t + \eta \theta_0 \text{sen} 2\omega t$$

y veamos qué sucede. Se encontrará que $\eta = 0$. En la ecuación que describe el movimiento del péndulo aparece principalmente el tercer armónico, o sea, un término en $\text{sen } 3\omega t$ y no $\text{sen } 2\omega t$. En tal caso la solución sería diferente

para un dispositivo en el cual la ecuación del movimiento incluyera un término en θ^2 , pues entonces la solución tendría un término en $\sin 2\omega t$ y podría usarse la misma técnica. Existen muchos problemas (por ejemplo, la dilatación térmica de sólidos) en los que la fuerza es más intensa para un valor positivo (negativo) del desplazamiento que para un valor igual negativo (positivo).

¿Cuál es la frecuencia del péndulo para grandes amplitudes? No existe una frecuencia única en el movimiento. Hemos visto que el término más importante (el componente mayor) es función de $\sin \omega t$, y diremos que ω es la *frecuencia fundamental* del péndulo. En nuestra aproximación ω viene dada por la ecuación (7.47). El término en $\sin 3\omega t$ se denomina *tercer armónico* de la frecuencia fundamental. El razonamiento que siguió a (7.44) sugiere que están presentes un número infinito de armónicos en el movimiento exacto, pero la mayoría de ellos son muy pequeños. La amplitud en (7.44) del componente fundamental del movimiento es θ_0 ; la amplitud del componente tercer armónico es $\epsilon \theta_0$.

Oscilador armónico forzado con fuerza de amortiguamiento. Consideremos con detalle el movimiento forzado de un oscilador armónico amortiguado. Este es un problema de la máxima importancia. Si además del rozamiento existe una fuerza externa $F(t)$ aplicada al oscilador, la ecuación del movimiento es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F(t)$$

o, con una notación más compacta, haciendo $\tau \equiv M/b$ y $\omega_0^2 \equiv C/M$,

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M} \quad (7.48)$$

Aquí ω_0 es la *frecuencia natural* del sistema en ausencia de rozamiento y en ausencia de cualquier otra fuerza exterior impulsora. Cuando al sistema se le impone una fuerza con una frecuencia diferente $\omega (\neq \omega_0)$, veremos que la respuesta vendrá dada con la frecuencia impulsora y no con la frecuencia natural. Pero, si la fuerza impuesta se elimina repentinamente, el sistema vuelve a una oscilación amortiguada, cuya frecuencia coincide aproximadamente con la frecuencia natural, con tal que el amortiguamiento sea bajo.

Supongamos en (7.48) que

$$\frac{F(t)}{M} = \frac{F_0 \sin \omega t}{M} \equiv \alpha_0 \sin \omega t \quad \alpha_0 \equiv \frac{F_0}{M} \quad (7.49)$$

de modo que la fuerza impulsora es sinusoidal con frecuencia ω . Esta relación define la magnitud α_0 . La frecuencia del sistema en el *estado estacionario* (aquel estado del sistema que se mantiene después que ha desaparecido cualquier efecto transitorio) será precisamente la frecuencia impuesta. De otra forma, la fase relativa entre la fuerza y la respuesta variaría con el tiempo. Esta es una característica importante del resultado —la respuesta del estado

estacionario de un oscilador armónico forzado (incluso con amortiguamiento) se presenta con la *frecuencia impuesta* y no con la frecuencia natural ω_0 . Ninguna otra frecuencia distinta de la impuesta satisfará la ecuación del movimiento. Por respuesta queremos indicar el desplazamiento x o la velocidad \dot{x} . Consideremos aquí que la respuesta es x .

Busquemos una solución de (7.48) de la forma

$$x = x_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (7.50)$$

en donde, a partir de la ecuación del movimiento, hemos de encontrar los valores de la amplitud x_0 y del ángulo de diferencia de fase ϕ . En (7.50) ω es la frecuencia de la fuerza impulsora, *no* la frecuencia natural del oscilador, y ϕ da la diferencia de fase entre la fuerza impulsora y el desplazamiento del oscilador. Así pues, ϕ tiene aquí un significado completamente diferente del que tenía en el oscilador armónico no amortiguado libre, en el que ϕ se relacionaba con las condiciones iniciales. En el caso del oscilador forzado no interesan las condiciones iniciales si únicamente se considera el estado estacionario.

Es interesante definir con precisión lo que queremos significar por diferencia de fase ϕ entre el desplazamiento y la fuerza impulsora. Tanto uno como la otra varían según una ley de oscilación armónica simple. El ciclo desde un máximo a otro de la fuerza o del desplazamiento equivale a 360° ó 2π radianes. La *diferencia de fase ϕ nos dice en qué ángulo el desplazamiento alcanza su máximo antes que la fuerza*. Por ejemplo, supongamos que la fuerza alcanza su valor positivo mayor en el instante en que el desplazamiento es cero y tiende a aumentar en el sentido positivo. Entonces el desplazamiento estará retrasado respecto a la fuerza en $\pi/2$ radianes. Pero ϕ se define como el ángulo en el que x adelanta a F , de modo que en este ejemplo ϕ es igual a $-\pi/2$.

Hallemos las derivadas

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Entonces la ecuación del movimiento (7.48) es

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{\tau}x_0 \cos(\omega t + \phi) = \alpha_0 \sin \omega t \quad (7.51)$$

Simplificaremos esta expresión mediante las relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \phi) &= \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi \\ \cos(\omega t + \phi) &= \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi \end{aligned}$$

(*) Es necesario que introduzcamos un ángulo ϕ (denominado de fase de x respecto a la fuerza F) que sea diferente de cero. No puede obtenerse ninguna solución si se suprime ϕ . Al hablar de un ángulo de fase hay que asegurarse de referirse al ángulo de fase de algo respecto a algo. En los problemas de electricidad es costumbre hablar de la fase de la corriente referida a la tensión. Aquí hablamos de la fase del desplazamiento x referida a la fuerza impulsora. Las dos fases no son equivalentes, porque la magnitud análoga a una corriente es dx/dt , y no x .

Así, pues, (7.51) se transforma en

$$\begin{aligned} & \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - \frac{\omega}{\tau} \operatorname{sen} \phi \right] x_0 \operatorname{sen} \omega t \\ & + \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \phi + \frac{\omega}{\tau} \cos \phi \right] x_0 \cos \omega t = \alpha_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (7.52) \end{aligned}$$

La ecuación (7.52) puede satisfacerse únicamente si es cero el coeficiente de $\cos \omega t$. Esta condición puede escribirse como

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos \phi} = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.53)$$

También es necesario que el coeficiente de $\operatorname{sen} \omega t$, sea igual a α_0 :

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - (\omega/\tau) \operatorname{sen} \phi} \quad (7.54)$$

A partir de (7.53) se deduce que

$$\cos \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.55)$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{-\omega/\tau}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

y de aquí (7.54) se reduce a

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.56)$$

Esta es la amplitud del movimiento.

Las ecuaciones (7.55) y (7.56) nos dan la solución deseada. Conocemos ahora la amplitud x_0 y la fase ϕ de la respuesta del sistema bajo la fuerza impulsora $F = M\alpha_0 \operatorname{sen} \omega t$:

$$x = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen} \left(\omega t + \operatorname{arc} \operatorname{tg}^1 \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (7.57)$$

La amplitud de la ecuación (7.57) viene representada en función de ω en la fig. 7.14 y el ángulo de la fase en la figura 7.15. Obsérvese en el gráfico que el ángulo de fase es siempre negativo. Esto puede entenderse analizando la ecuación (7.53), ya que $\phi = 0$ para $\omega = 0$, $0 > \phi > -\pi/2$ para $\omega < \omega_0$ y $-\pi/2 > \phi > -\pi$ para $\omega > \omega_0$.

Podemos apreciar el significado de esta ecuación si examinamos casos límites. En nuestra discusión suponemos siempre que el amortiguamiento es pequeño, de modo que $\omega_0\tau \gg 1$.

Frecuencia impulsora baja, $\omega \ll \omega_0$. Vemos aquí a partir de (7.55) que

$$\cos \phi \rightarrow 1 \quad \operatorname{sen} \phi \rightarrow -0$$

por lo tanto, $\phi \rightarrow 0$. Esta respuesta a baja frecuencia se dice que está *en fase* con la fuerza impulsora. A partir de (7.56) vemos que

$$x_0 \rightarrow \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{M\alpha_0}{C} = \frac{F_0}{C} \quad (7.58)$$

El muelle (y no la masa ni el rozamiento) condiciona la respuesta en este límite; la masa se desplaza simplemente adelante y atrás por acción de la fuerza contra la tendencia del muelle a recuperar su posición.

Respuesta de resonancia, $\omega = \omega_0$. La respuesta puede ser muy grande en la resonancia. La resonancia se utiliza en muchas aplicaciones, de modo que es preciso estudiarla cuidadosamente. Para $\omega = \omega_0$ la frecuencia impuesta se hace igual a la frecuencia natural del sistema en ausencia del rozamiento. Tenemos

$$\cos \phi \rightarrow \pm 0 \quad \operatorname{sen} \phi \rightarrow -1 \quad \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

La amplitud para $\omega = \omega_0$ viene dada por

$$x_0 = \frac{\alpha_0\tau}{\omega_0} \quad (7.59)$$

Cuanto más bajo es el amortiguamiento mayores son τ y x_0 . Manteniendo F_0 constante, la relación entre la respuesta en la resonancia y la respuesta a la frecuencia cero viene dada según (7.58) y (7.59) como

$$\frac{x_0(\omega = \omega_0)}{x_0(\omega = 0)} = \frac{\alpha_0\tau/\omega_0}{\alpha_0/\omega_0^2} = \omega_0\tau = Q$$

con el coeficiente Q que definimos por la ecuación (7.41). Este puede ser muy grande, ¡es normal 10^4 o más! Puede decirse que el amortiguamiento condiciona la respuesta en la resonancia.

La respuesta máxima x_0 no se presenta exactamente cuando $\omega_0 = \omega$. Observemos que la derivada de la ecuación (7.56) tiene un cero en

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right] = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

o sea,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}$$

Esta es la posición de respuesta máxima de la curva de x_0 en función de ω . Si $\omega_0\tau \gg 1$, el máximo está muy cerca de $\omega = \omega_0$.

Puede parecer extraño que la respuesta máxima se obtenga con el ángulo de diferencia de fase igual a $-\pi/2$, es decir, cuando la fuerza está desfasada exactamente 90° respecto al desplazamiento. Podría parecer lógico que la resonancia se presentara cuando $\phi = 0$ y no cuando $\phi = -\pi/2$. Pero el secreto está en que la potencia absorbida por el oscilador no depende directamente de la fase entre la fuerza impulsora y el desplazamiento, sino más

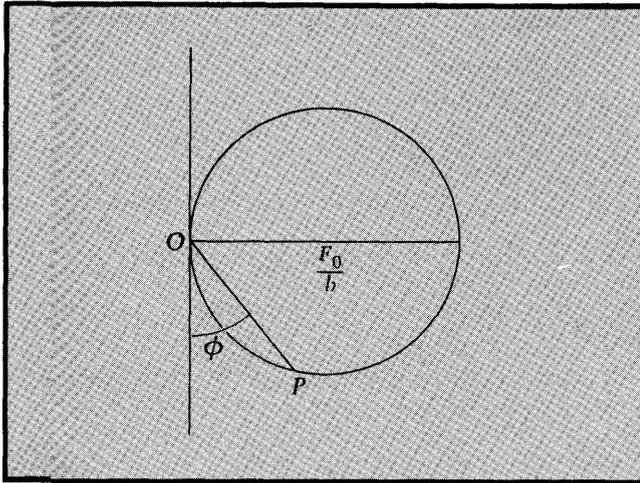
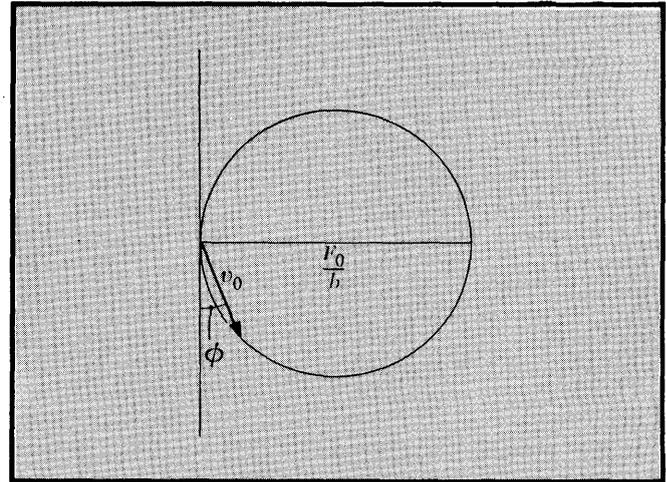
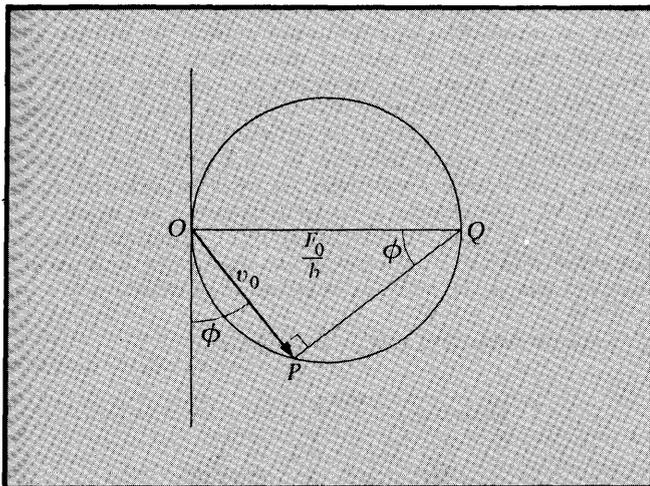


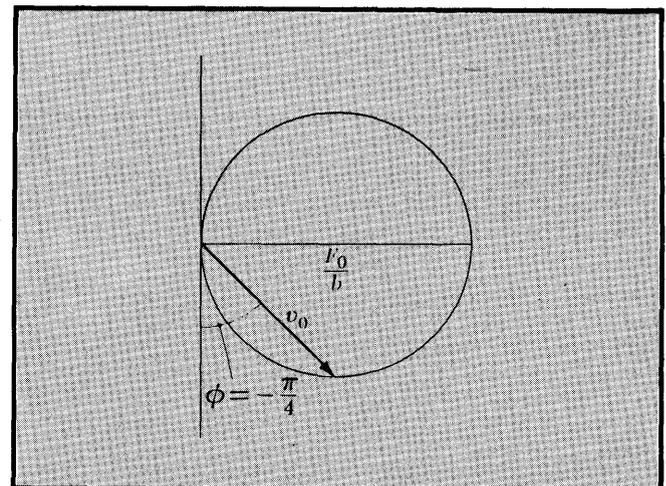
FIG. 7.16 a) «Gráfica polar» de una representación sencilla del oscilador armónico impulsado o forzado. Se construye una circunferencia con diámetro F_0/b y se dibuja un segmento de recta OP que forme un ángulo ϕ con el eje de ordenadas.



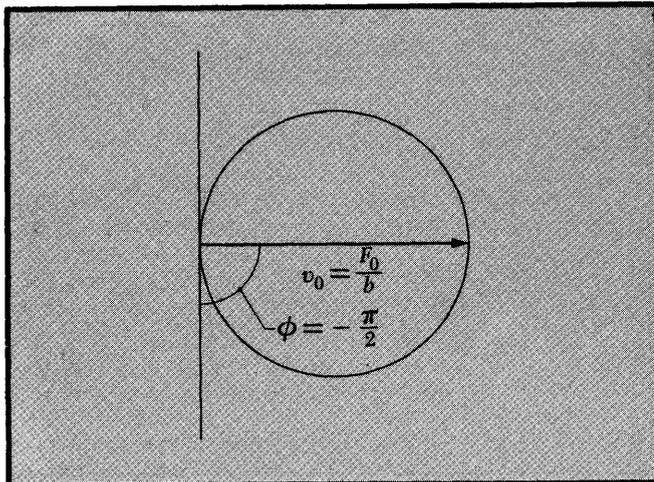
c) Para $\omega \ll \omega_0$, $\phi \approx 0$ y $v_0 \ll F_0/b$. La respuesta es muy pequeña en este límite.



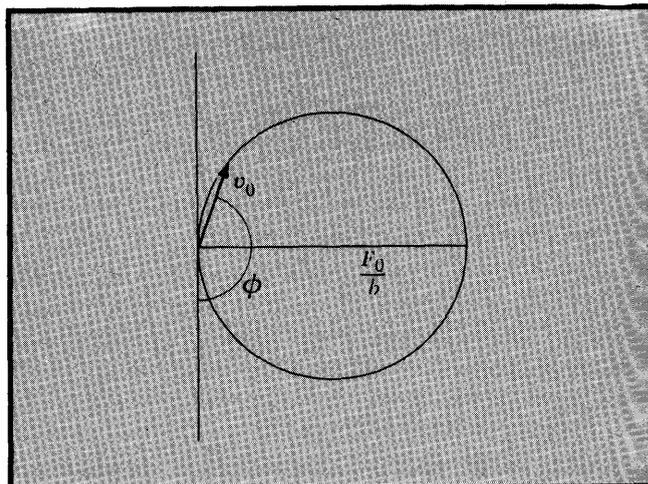
b) Sea cualquiera el ángulo ϕ , el triángulo OPQ es rectángulo. Así, pues, el segmento $OP = -(F_0/b) \text{sen } \phi$. A partir de las ecuaciones (7.55) a (7.57) vemos que el segmento $OP = \omega x_0 = v_0$, es la amplitud de la velocidad.



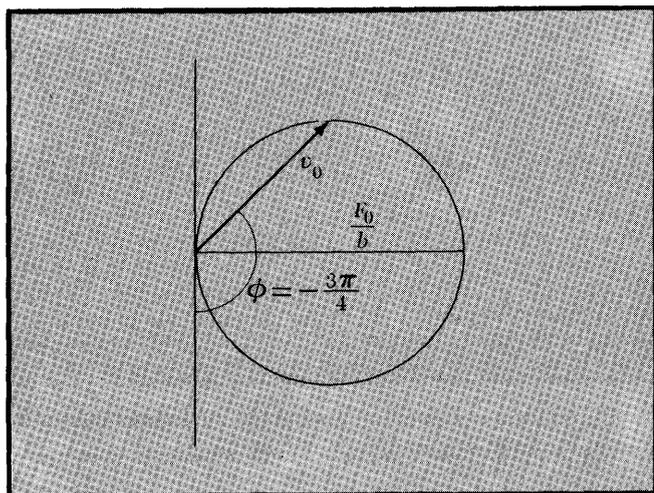
d) Cuando ω crece, $|\phi|$ aumenta y lo mismo ocurre a v_0 . Para $\phi = -\pi/4$, $v_0 = F_0/\sqrt{2}b$.



e) Para $\phi = -\pi/2$, $\omega = \omega_0$ y $v_0 = F_0/b$. La amplitud de la velocidad es *máxima en la resonancia*.



g) Para $\omega \gg \omega_0$, $v_0 \ll F_0/b$ nuevamente, y $\phi \approx -\pi$.



f) Para $\omega > \omega_0$, v_0 disminuye de nuevo. Para $\phi = -3\pi/4$, $v_0 = F_0/\sqrt{2}b$ nuevamente.

bien de la fase entre la fuerza y la *velocidad*. Sólo hay que reflexionar un momento para ver que obtendremos las mayores desviaciones cuando la velocidad esté *exactamente en fase con las fuerzas impulsoras*. De este modo la masa resulta empujada con el lugar y momento precisos. Cuando el desplazamiento es cero, la velocidad tiene su máximo valor. Si en este punto se está moviendo en el sentido positivo, nos conviene que la fuerza alcance en ese instante su mayor valor con objeto de obtener el movimiento máximo. En los puntos extremos en los que la velocidad cambia de sentido conviene, para que se presente la resonancia, que la fuerza cambie de sentido del mismo modo que lo hace el movimiento en ese mismo instante. Así, pues, la resonancia se entiende mejor en función de la fase entre la velocidad y la fuerza impulsora. Sabemos que la velocidad de un oscilador adelanta a su desplazamiento exactamente en 90° . Así, pues, para la resonancia, con fuerza y velocidad en fase, debemos tener la fuerza 90° adelantada al desplazamiento, de modo que $\phi = -\pi/2$. Aunque, como hemos dicho anteriormente, la amplitud máxima tiene lugar a una frecuencia ligeramente inferior que ω_0 , la potencia máxima corresponde a $\omega = \omega_0$.

Frecuencia impulsora alta, $\omega \gg \omega_0$. Aquí

$$\cos \phi \rightarrow -1 \quad \text{sen } \phi \rightarrow 0 \quad \phi \rightarrow -\pi$$

y

$$x_0 \rightarrow \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}$$

En este límite, la respuesta disminuye como $1/\omega^2$. La inercia de la masa condiciona la respuesta en el límite de altas frecuencias y la masa responde esencialmente como un objeto libre, siendo sacudida atrás y adelante por la fuerza. Obsérvese que la fase ϕ del desplazamiento x respecto a la fuerza impulsora F empieza en cero a frecuen-

cias. bajas, pasa por $-\frac{1}{2}\pi$ en la resonancia y llega a $-\pi$ a frecuencias elevadas. *El desplazamiento siempre se retrasa respecto a la fuerza impulsora.*

Un procedimiento geométrico interesante para entender estos fenómenos viene indicado en la fig. 7.16. En lugar de representar la respuesta x_0 o quizás la potencia en función de ω , utilizamos el ángulo ϕ como variable. De las ecuaciones (7.55) y (7.56) resulta que

$$\omega x_0 = \frac{F_0}{b} \operatorname{sen}(-\phi) = v_0$$

en donde b es el coeficiente de amortiguamiento (M/τ) en la ecuación (7.30). El producto ωx_0 es justamente el valor máximo de la velocidad \dot{x} , o amplitud de la velocidad que llamaremos v_0 . Si hacemos ahora la representación polar como en la fig. 7.16, la longitud de la línea OP es justamente esta velocidad máxima v_0 con el diámetro escogido F_0/b para estar de acuerdo con la ecuación anterior. Debemos recordar que ϕ es realmente un ángulo negativo, pero como en el dibujo estamos interesados sólo en la magnitud de v_0 , trataremos a ϕ como si fuera un ángulo positivo, ya que

$$\operatorname{sen}(-\phi) = -\operatorname{sen} \phi \quad |\operatorname{sen}(-\phi)| = |\operatorname{sen} \phi|$$

Los valores del ángulo ϕ dados en las leyendas de la fig. 7.16 son los valores negativos correctos.

En esta gráfica polar podemos ver que cuando ϕ varía, la longitud de OP parte de un valor pequeño (fig. 7.16 c), crece hasta el valor máximo del diámetro del círculo cuando $\phi = -\pi/2$ (fig. 7.16 e) y luego decrece nuevamente cuando ϕ se aproxima a $-\pi$ (figs. 7.16 f y g). La potencia, como veremos luego, es el valor medio en un círculo de $F\dot{x}$ [véanse ecuaciones (7.60) y (7.62)] y tiene su valor máximo para $\phi = -\pi/2$.

Absorción de potencia. La media en el tiempo del trabajo realizado por unidad de tiempo sobre el sistema oscilante por la fuerza impulsora viene dada, haciendo uso de (7.49) y de la derivada respecto del tiempo de (7.57) por

$$P = \langle F\dot{x} \rangle = \frac{M\alpha_0^2 \omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \langle \operatorname{sen} \omega t \cos(\omega t + \phi) \rangle \quad (7.60)$$

Empleando la identidad

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi$$

tendremos

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sen} \omega t [\cos \omega t \cos \phi - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi] \rangle &= -\operatorname{sen} \phi \langle \operatorname{sen}^2 \omega t \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (7.61)$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $\langle \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \rangle = 0$. Vemos que la fase tiene su importancia (véase figu-

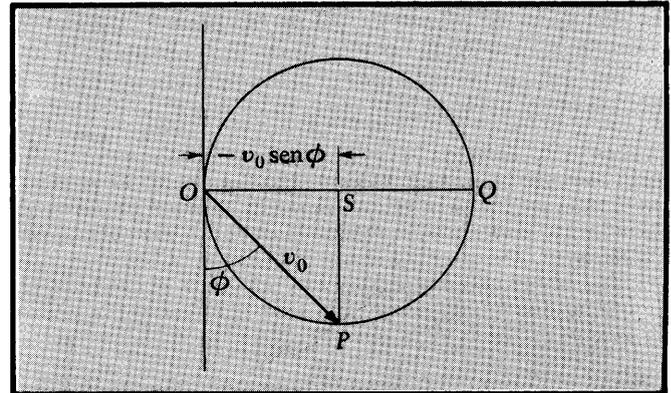
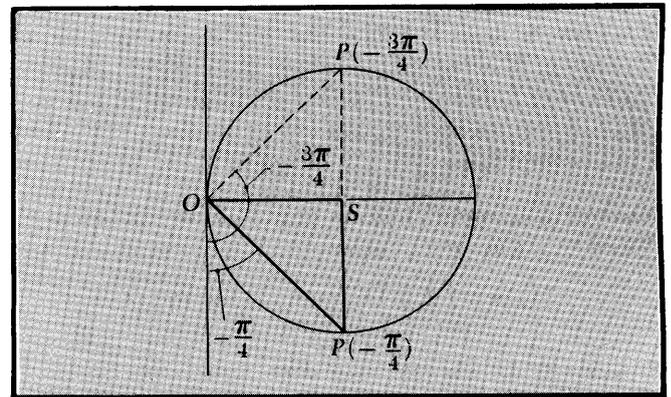


FIG. 7.17 a) El segmento $OS = -v_0 \operatorname{sen} \phi$ está indicado. A partir de las ecuaciones (7.60) a (7.62) vemos que la potencia absorbida es proporcional a $-v_0 \operatorname{sen} \phi$ o al segmento OS .



b) Para los ángulos de fase $\phi = -\pi/4$ y $\phi = -3\pi/4$, el segmento $OS = \frac{1}{2} OS_{\max}$. Así, pues, la absorción de potencia *mitad* de la máxima ocurre en estos puntos. Naturalmente la absorción *máxima* se verifica para $\phi = -\pi/2$ (resonancia).

ra 7.17 a y b). Con la ecuación (7.55) para $\operatorname{sen} \phi$ podemos escribir (7.60) como

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \\ &= \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \tau \left[\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega/\tau} \right)^2 + 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Este resultado es muy importante y viene ilustrado en la fig. 7.17.

La absorción de potencia en la resonancia para $\omega = \omega_0$ es

$$P_{\text{res}} = \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \tau$$

La absorción de potencia (7.62) se reduce a la mitad del valor en la resonancia cuando ω varía en $\pm (\Delta\omega)_{1/2}$ de modo que

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2 - \omega^2 \equiv (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega(\Delta\omega)_{1/2} \quad (7.63)$$

Así, pues, la anchura completa $2(\Delta\omega)_{1/2}$ de la resonancia en donde la potencia es mitad de la máxima es igual a $1/\tau$. Se ve, utilizando la expresión para Q encontrada en (7.41), que

$$Q = \omega_0\tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}} =$$

$$= \frac{\text{Frecuencia en la resonancia}}{\text{anchura completa a la mitad de la potencia máxima}}$$

Por consiguiente, Q mide la agudeza del ajuste o sintonía. (fig. 7.18).

EJEMPLO

Estudio numérico de un problema sobre oscilador armónico. Sea la masa $M = 1\text{g} = 0,001\text{ kg}$, la constante de la fuerza $C = 10^4\text{ dinas/cm} = 10\text{ N/m}$, y el tiempo de relajación $\tau = \frac{1}{2}\text{ s}$. Entonces, según la ecuación (7.3):

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10^4}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10}{10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^2\text{ s}^{-1}$$

mientras que, según (7.33), la frecuencia de oscilación libre es

$$\left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = [10^4 - 1]^{\frac{1}{2}} \approx 10^2\text{ s}^{-1}$$

El factor Q del sistema viene dado según (7.41) por

$$Q \approx \omega_0\tau = (10^2)\left(\frac{1}{2}\right) = 50$$

El tiempo para que la amplitud se amortigüe hasta e^{-1} de su valor inicial (para el sistema libre) es

$$2\tau = 1\text{ s}$$

utilizando (7.32). La constante de amortiguamiento $b = M/\tau = 1\frac{1}{2} = 2\text{ g/s}$, o

$$\frac{6,001}{\frac{1}{2}} = 2 \times 10^{-3}\text{ kg/s}$$

Hagamos ahora que el sistema sea impulsado por la fuerza

$$F = Mx_0 \text{ sen } \omega t = 10 \text{ sen } 90t \text{ dinas.}$$

Vemos que $x_0 = F_0/M = 10\text{ dinas/g}$ y la frecuencia impuesta es $\omega = 90\text{ s}^{-1}$. La amplitud viene dada por la ecuación (7.56):

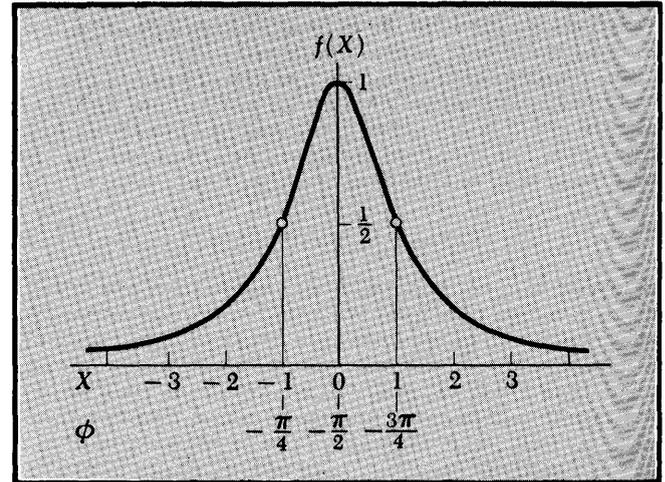


FIG. 7.18 La absorción de potencia es proporcional a $f(X) = 1/(1 + X^2)$, en donde

$$X = \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega/\tau} = \cot \phi$$

de acuerdo con la ecuación (7.62). Para $\phi \approx 0$, $X = \cot \phi$ es grande y negativa. Para $\phi = -\pi/2$, $X = \cot \phi = 0$ y la absorción de potencia es un máximo. Se pueden ver también los puntos de mitad de potencia $X = \pm 1$. La función $f(X) = 1/(1 + X^2)$ se conoce como función de Lorentz.

$$x_0 \approx \frac{10}{[4 \times 10^6 + 4 \times 10^4]^{\frac{1}{2}}} \approx 5 \times 10^{-3}\text{ cm}$$

y la fase viene dada por (7.53):

$$\text{tg } \phi \approx -\frac{180}{1,9 \times 10^3} \approx -0,1$$

o bien $\phi \approx -0,1\text{ rad} \approx -6^\circ$. Así, pues, en cada ciclo el máximo del desplazamiento se verifica a $0,1\text{ rad}/90\text{ rad por segundo} \approx 10^{-3}$ segundos después del máximo de la fuerza.

Podemos comparar la amplitud anterior con la que existe en el límite $\omega \rightarrow 0$ y con la que se presenta en la resonancia. Según la ecuación (7.58) tenemos $x_0(\omega = 0) = x_0/\omega_0^2 = 10/10^4 = 10^{-3}\text{ cm}$. En la resonancia tendremos, según las ecuaciones (7.59) y (7.41), que

$$x_0(\omega = \omega_0) = Qx_0(\omega = 0) = (50)(10^{-3}) = 5 \times 10^{-2}\text{ cm}$$

La anchura completa de la curva de resonancia entre los puntos de mitad de la potencia máxima es según (7.63):

$$2(\Delta\omega)_{1/2} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{100}{50} = 2\text{ s}^{-1}$$

Obsérvese que en este ejemplo hemos empleado siempre «frecuencia» queriendo significar «frecuencia angular». Para obtener las frecuencias normales en oscilaciones o ciclos por segundo, debemos dividir por 2π .

NOTAS MATEMÁTICAS

Investigaremos ahora algunas ecuaciones más complicadas que surgen en el estudio de la mecánica. En el Cap. 3 hemos resuelto los dos tipos de ecuaciones que corresponden a los casos en que *no existe fuerza* o que *ésta es constante*. Desde el punto de vista de la facilidad de resolverla, consideremos la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = bt$$

en donde b es una constante y t el tiempo. Si se deriva t^3 dos veces se obtiene $6t$, de modo que la solución de esta ecuación será

$$x = \frac{1}{6}bt^3 + c_0t + d_0$$

en donde c_0 y d_0 son las constantes arbitrarias del mismo tipo que las encontradas en las soluciones de las ecuaciones (3.52) y (3.54). Para $t = 0$, $x = d_0$ y $dx/dt = c_0$. En una forma semejante, si $d^2x/dt^2 = bt^2$ o ft^3 , o así sucesivamente, podemos fácilmente encontrar una solución. Desgraciadamente los problemas de este tipo son escasos y, por ello, continuaremos con otros que se encuentran más a menudo en la física.

Fuerza resistente. Un problema bastante común en mecánica corresponde al caso de una fuerza resistente directamente proporcional a la velocidad. (Esta ecuación aparece también en el caso de la desintegración de las sustancias radiactivas.) En este caso la segunda ley de Newton nos da

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -bv = -b \frac{dx}{dt} \tag{7.64}$$

El signo menos indica que la fuerza tiende a reducir o disminuir la velocidad. Esta ecuación puede simplificarse recordando que la aceleración d^2x/dt^2 es igual a dv/dt , con lo cual (7.64) se convierte en

$$m \frac{dv}{dt} = -bv$$

o

$$\frac{dv}{v} = -\frac{bdt}{m}$$

Esta ecuación puede integrarse por los métodos clásicos:

$$\int \frac{dv}{v} = \log_e v = -\int \frac{b dt}{m} = -\frac{bt}{m} + \text{const}$$

$$v = Ae^{-bt/m} \tag{7.65}$$

Aquí e representa la base de los logaritmos neperianos o naturales y tiene el valor 2,718... Las propiedades de estos logaritmos son semejantes a las de los logaritmos decimales y sus valores se encuentran en muchas tablas matemáticas. Un número que vale la pena recordar es $e^{-0,693} = \frac{1}{2} = 0,500$.

¿Cuánto vale la constante A en la ecuación (7.65)? Para $t = 0$, $e^0 = 1$, de modo que $v = A$. Por tanto, ésta es una constante arbitraria que podemos utilizar para ajustar las condiciones iniciales. Sin embargo, previamente teníamos dos constantes arbitrarias; aquí tenemos sólo una constante. Pero la ecuación que hemos resuelto es de primer orden y así tenemos sólo una constante. Podemos ahora volver a $v = dx/dt$ y escribir

$$dx/dt = v_0 e^{-bt/m} \tag{7.66}$$

en donde v_0 es la velocidad correspondiente para $t = 0$. Ensayemos una solución de la forma

$$x = B + Ce^{-bt/m}$$

Ponemos la forma exponencial porque la derivada de e^{-t} es e^{-t} . Sustituyendo en la ecuación (7.66) resulta

$$-b/m Ce^{-bt/m} = v_0 e^{-bt/m}$$

Por tanto, $C = -mv_0/b$. ¿Y la constante B ? Sospechamos que será x_0 , la condición inicial; sin embargo, cuando introducimos $t = 0$ en la solución encontramos que

$$x = B + C = B - \frac{mv_0}{b}$$

Por consiguiente, si $x = x_0$ para $t = 0$, $B = x_0 + mv_0/b$. Nuestra solución es entonces

$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

Como ejemplo, supongamos una partícula de masa 25 g sobre la cual actúa una fuerza $-5v$ dinas y parte de $x = -10$ con velocidad de 40 en la dirección positiva de x . Utilizando las expresiones anteriores resulta

$$x = -10 + 40 \times \frac{25}{5}(1 - e^{-5/25t}) = -10 + 200(1 - e^{-t/5})$$

$$t = 0 \quad x = -10$$

$$\frac{dx}{dt} = -200(-\frac{1}{5})e^{-t/5} = +40 \text{ para } t = 0$$

Obsérvese que cuando $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 190$ y $v \rightarrow 0$.

Velocidad límite. Procedemos ahora al estudio de algunas ecuaciones más complicadas, tales como

$$m \frac{dv}{dt} = F - bv \tag{7.67}$$

en donde F es una constante.

La solución final en estado estacionario resulta ser

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad F = bv \quad v = \frac{F}{b}$$

Esta velocidad se denomina normalmente velocidad límite. Como solución ensayemos

$$v = \frac{F}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}e^{-bt/m} = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{b}{F}v\right) = \frac{F}{m} - \frac{b}{m}v$$

que concuerda con la ecuación (7.67). De esta solución resulta que para $t = 0$, $v = 0$. Por tanto, si hay otras condiciones iniciales, deben satisfacer esta ecuación. Observemos que para $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow F/b$.

Supongamos que para $t = 0$, $v = v_0$. Ensayemos

$$v = \frac{F}{b}(1 - e^{-bt/m}) + v_0 e^{-bt/m} \quad (7.68)$$

Derivando podemos comprobar que esta solución satisface la ecuación original.

Es interesante que la solución general (7.68) anterior es la suma de la solución de la ecuación (7.67) que hemos ensayado anteriormente, más la solución dada por la ecuación (7.66) para $m dv/dt = -bv$. Desde otro punto de vista consideremos la solución de $m dv/dt + bv = F$. Si encontramos una solución a esta ecuación, podemos añadirle una solución de $m dv/dt + bv = 0$ y seguirá siendo solución de la primera.

Fuerza del muelle. Vamos ahora a resolver la ecuación del movimiento de una fuerza *tipo-muelle*, dirigida siempre hacia el origen (o hacia algún punto convenientemente elegido como origen), que crece directamente con la distancia a dicho punto. Matemáticamente esto significa que $F = -Cx$; si x es positivo, la fuerza es negativa; si x es negativo, la fuerza es positiva. C es una constante positiva llamada *constante del muelle*. Nuestra ecuación es ahora

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{m}$$

Como solución de ensayo, sea $x = \cos \omega t$. Derivando tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin \omega t \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

Comparando esto con la ecuación original, veremos que si $\omega^2 = C/m$, nuestra solución es válida. También es claro que la solución $x = \sin \omega t$ es válida. Pero, ¿dónde están nuestras constantes para las condiciones iniciales? Ensayemos

$$x = A' \sin \omega t + B' \cos \omega t$$

Esta es todavía una solución y observemos que para $t = 0$, $x = B'$. Por tanto, B' es el valor de x_0 que hemos usado antes. Derivando y haciendo $t = 0$ resulta $dx/dt = \omega A'$. Este es el valor de v_0 que hemos usado antes. Obsérvese que A'

Oscilador armónico: Propiedades y ejemplos

no es la velocidad inicial. Una forma alternativa de escribir esta solución es

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

Para $t = 0$, $x = A \sin \phi$ y para $t = 0$, $dx/dt = A\omega \cos \phi$. Así las dos constantes A y ϕ han reemplazado a A' y B' . Con mayor frecuencia este segundo tipo de solución es de uso conveniente, aunque también es útil resolver problemas con el primer tipo. Unos ejemplos son convenientes. Supongamos que $C/m = 25$, de modo que $\omega = 5$.

1. La partícula parte del origen para $t = 0$ con una velocidad en dirección negativa de x de 10 cm/s. Suponiendo que $x = A \sin(5t + \phi)$, $x = A \sin \phi$ para $t = 0$. Por tanto, ϕ es cero o π , $dx/dt = +5A \cos \phi = -10$. Vemos, pues, que ϕ debe ser igual a π y A debe ser 2. Nuestra solución es

$$x = 2 \sin(5t + \pi) = -2 \sin 5t$$

2. Para $t = 0$ la partícula está en $x = +5$ en reposo. Por tanto, $+5 = A \sin \phi$ y $dx/dt = \omega A \cos \phi = 0$. Es decir, $A = 5$ y $\phi = \pi/2$ y nuestra solución es

$$x = 5 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos 5t$$

3. Para $t = 0$, $x = -5$ y la velocidad es -25 . Esta vez $-5 = A \sin \phi$ y $-25 = +A\omega \cos \phi = +5A \cos \phi$. Dividiendo resulta $\tan \phi = +1$. Por tanto, $\phi = \pi/4$ ó $5\pi/4$. Pero $\cos 5\pi/4 = -1/\sqrt{2}$ mientras que $\cos \pi/4 = +1/\sqrt{2}$. Por tanto, $\phi = 5\pi/4$. Sustituyendo en la primera ecuación resulta $A = \sqrt{2} \times 5$. Alternativamente se puede elegir $A = -5\sqrt{2}$ y $\phi = \pi/4$:

$$x = 5\sqrt{2} \sin\left(5t + \frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{o} \quad -5\sqrt{2} \sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Fuerza del muelle y fuerza resistente. Una ecuación más difícil surge en el caso de un oscilador armónico amortiguado. La fuerza vale ahora $-bv$ más la fuerza $-Cx$.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -bv - Cx, \quad \text{donde } v = \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

Ensayar una solución de la forma $x = A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi)$

$$b \frac{dx}{dt} = -\beta b A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) + b \omega A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2m\omega\beta A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$+ \beta^2 m A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) - m\omega^2 A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi)$$

Entonces

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Cx = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) [C - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m] + Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) [b\omega - 2m\omega\beta] = 0$$

La única forma en que esta ecuación puede satisfacerse para todos los valores de t es hacer que todos los coeficientes entre paréntesis sean iguales a cero

$$b\omega - 2m\omega\beta = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$C - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m = C - \frac{b^2}{2m} - m\omega^2 + \frac{b^2}{4m^2} m = 0$$

$$\omega^2 = \frac{C}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{C}{m} - \beta^2$$

Obsérvese que A y ϕ son las constantes arbitrarias y no están especificadas por la ecuación diferencial. Sin embargo, la frecuencia ω y la constante de amortiguamiento β están determinadas. Si $\omega_0 = C/m$, $\omega < \omega_0$; pero si β es pequeño, es decir, si el decrecimiento de la amplitud $Ae^{-\beta t}$ es lento, $\omega \approx \omega_0$.

La forma de esta solución puede verse en la fig. 7.19 para la cual $\omega/\beta \approx 5$.

Hay que observar que si b es grande, ω puede ser cero o $C = b^2/4m$. ¿Cuál es la solución en este caso?

$Ae^{-bt/2m} \sin \phi = A' e^{-bt/2m}$ es una solución que puede comprobarse por ensayo. Pero también $Bt e^{-bt/2m}$ es una solución. Por tanto, la solución general es

$$x = A' e^{-bt/2m} + Bt e^{-bt/2m} \quad (7.69)$$

en donde A' y B son las constantes arbitrarias necesarias para cumplir las condiciones iniciales. Esta solución se llama *solución críticamente amortiguada*. x disminuye a cero más deprisa que si

$$C < \frac{b^2}{4m} \quad \text{o} \quad C > \frac{b^2}{4m}$$

Si $C < b^2/4m$, la solución es *supercrítica* y vale

$$x = e^{-bt/2m} \left[A \exp \left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{C}{m}} t \right) + B \exp \left(-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{C}{m}} t \right) \right] \quad (7.70)$$

en donde A y B son las constantes necesarias para el cumplimiento de las condiciones iniciales.

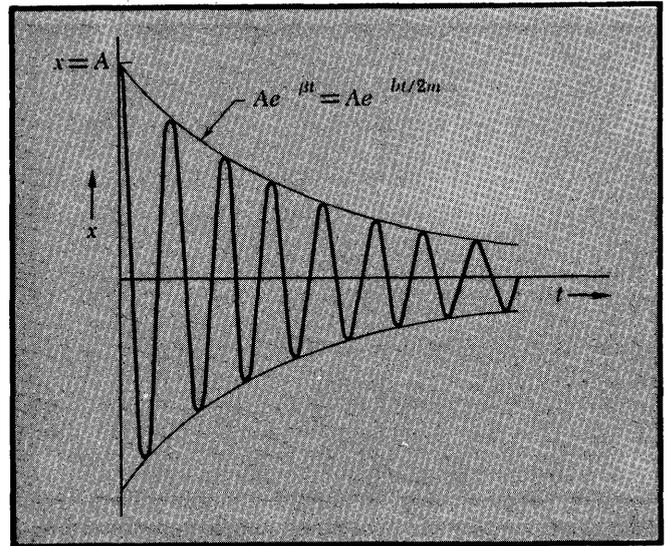


FIG. 7.19 Oscilador armónico amortiguado.

Los números complejos y el oscilador armónico forzado. Los alumnos familiarizados con los números complejos recordarán el teorema de Moivre, el cual establece

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

en donde $i = \sqrt{-1}$. Tal expresión $e^{i\alpha}$ se denomina *cantidad compleja*. $\cos \alpha$ es la *parte real* y $\sin \alpha$ la *parte imaginaria*. Los números complejos pueden representarse gráficamente tomando la parte real como abscisa y la parte imaginaria como ordenada (fig. 7.20). La longitud de la línea OA es la *magnitud del complejo* o *número*. Su cuadrado se obtiene multiplicando el número por su complejo conjugado; este último se obtiene cambiando el signo de i allí donde aparece. La magnitud del complejo es, naturalmente, un número real y en este caso vale

$$e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha} = e^0 = 1$$

Vemos que OA tiene la longitud unidad, pues $\cos \alpha = OB/OA = OB$.

La adición, sustracción y multiplicación de complejos siguen las reglas usuales. Por ejemplo

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= a + c + i(b + d) \\ (a + ib) - (c + id) &= a - c + i(b - d) \\ (a + ib) \times (c + id) &= ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

ya que $i^2 = -1$

Para dividir necesitaremos manipular el cociente de tal modo que el denominador sea un número real y así las

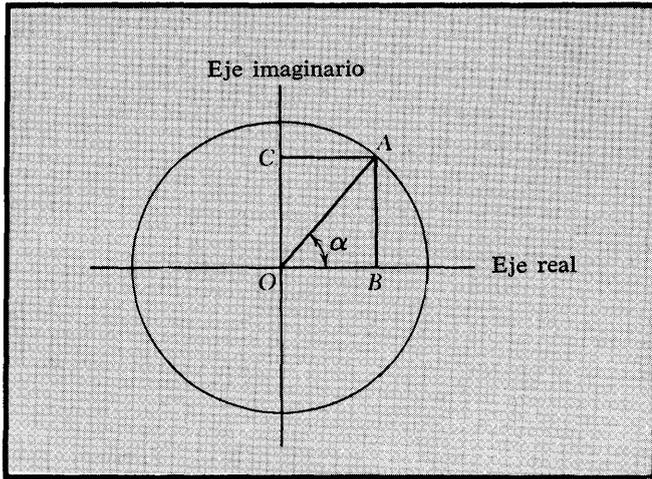


FIG. 7.20 Un número complejo puede representarse disponiendo la parte real OB a lo largo de un eje y la parte imaginaria OC según un eje perpendicular al anterior. En este caso OA representa $e^{i\alpha}$, $OB = \cos \alpha$, $OC = \sin \alpha$. OA es la magnitud de la cantidad compleja.

partes real e imaginaria del cociente serán fácilmente reconocibles:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \times (c - id)}{(c + id) \times (c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Finalmente debe observarse que cualquier número complejo puede escribirse en la forma $\rho e^{i\phi}$. Para determinar ρ y ϕ en función de las partes real e imaginaria estableceremos que

$$\rho e^{i\phi} = \rho \cos \phi + i \rho \sin \phi = a + ib$$

$$\rho e^{i\phi} \times \rho e^{-i\phi} = \rho^2 = (a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2 \quad (7.71)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a} \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a}$$

Daremos ahora una solución muy clara del problema del oscilador armónico impulsado, utilizando el esquema sobre números complejos. La ecuación del movimiento [ecuaciones (7.48) y (7.49)] es (escribir $\cos \omega t$ por conveniencia en lugar de $\sin \omega t$),

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \cos \omega t \quad (7.72)$$

Reemplacemos el término correspondiente a la fuerza por

$$\alpha_0 e^{i\omega t} \equiv \alpha_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Al final de los cálculos tendremos que considerar que la respuesta es la parte real de x si la fuerza impulsora es $\alpha_0 \cos \omega t$ (siendo α_0 real).

Oscilador armónico: Propiedades y ejemplos

Busquemos para (7.72) una solución de la forma

$$x = X_0 e^{i\omega t} \quad (7.73)$$

en donde X_0 puede ser un número complejo. Sustituyendo (7.73) en (7.72) tendremos

$$\left(-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega_0^2\right) X_0 e^{i\omega t} = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

de donde,

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)} \quad (7.74)$$

Es de utilidad considerar separadamente las partes real e imaginaria de X_0 . Tendremos

$$\begin{aligned} X_0 &= \left[\frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)} \right] \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)} \right] \\ &= \alpha_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \end{aligned}$$

de aquí que

$$\operatorname{Re}(X_0) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

$$\operatorname{Im}(X_0) = \frac{-(\omega/\tau)\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

En el límite, cuando $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega/\tau$ se tendrá que

$$\operatorname{Re}(X_0) \approx \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \operatorname{Im}(X_0) \approx 0$$

Esta condición se denomina *fuera de resonancia*, y aquí la parte real de X_0 es mucho más importante que la parte imaginaria.

En el límite $|\omega_0^2 - \omega^2| \ll \omega/\tau$ diremos que se está *cerca de la resonancia*, y para $\omega_0 = \omega$ se está *en resonancia* o en el centro de la resonancia. Para $\omega_0 = \omega$,

$$\operatorname{Re}(X_0) = 0$$

$$\operatorname{Im}(X_0) = \alpha_0 \frac{\tau}{\omega}$$

Cuanto mayor sea τ , más débil será el amortiguamiento y mayor la parte imaginaria de la respuesta en la resonancia.

Si recordamos que *fuera de la resonancia* el ángulo de fase ϕ es próximo a 0 o a $-\pi$, comprenderemos por qué la amplitud tiene una parte imaginaria muy pequeña; mientras que cuando $\omega = \omega_0$, $\phi = -\pi/2$ y el desplazamiento está desfasado con la fuerza, la parte imaginaria de la amplitud, correlacionada con la amplitud de la velocidad, será grande y la parte real de la amplitud será nula.

Escribamos X_0 en forma $\rho e^{i\phi}$, como en la ecuación (7.71). Entonces a partir de (7.71) y (7.74) tendremos para la amplitud de la respuesta

$$\rho = (X_0 X_0^*)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

X_0^* es el complejo conjugado de X_0 , de modo que $X_0 X_0^*$ es real. También tendremos para el ángulo de fase de x respecto a F ,

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La absorción media de potencia viene dada por

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle F\dot{x} \rangle = \langle \operatorname{Re}(F)\operatorname{Re}(\dot{x}) \rangle \\ &= \langle [M\alpha_0 \cos \omega t][-\rho\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)] \rangle \end{aligned} \quad (7.75)$$

Hemos tomado la parte real de x para corresponder a la realidad física si la fuerza físicamente real es la parte real de F . Existen otras formulaciones válidas para la media respecto al tiempo; lo que adquiere importancia es considerar la parte de x que está en fase con F . Empleando la ecuación equivalente a (7.61) y la relación $\rho \operatorname{sen} \phi = \operatorname{Im}(X_0)$, tendremos a partir de la ecuación (7.75)

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= -M\alpha_0\rho\omega \langle \cos^2 \omega t \rangle \operatorname{sen} \phi = -\frac{1}{2}M\alpha_0\omega \operatorname{Im}(X_0) \\ &= \frac{1}{2}M\alpha_0^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido anteriormente en la ecuación (7.62).

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*. Caps. 20 (sec. 8) y 24 (sec. 12). Editorial Reverté.

Y. Rocard, *General Dynamics of Vibrations*, Frederic Ungar Publishing Co., Nueva York, 1960. Un libro simple y claro escrito con un amplio alcance de aplicaciones.

B. L. Walsh, Parametric Amplification, *International Science and Technology*, núm. 17, pág. 75, mayo 1963. Una discusión elemental de los amplificadores paramétricos y su propiedad de bajo ruido.

Para ejemplo del tratamiento de oscilaciones armónicas, libres, amortiguadas y forzadas, en un libro de texto familiar, a nivel intermedio, véase John L. Synge y Byron A. Griffith, *Principles of Mechanics*, sec. 6.3, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.