I.1 Newton y el origen de la dinámica

La ciencia occidental contemporánea tiene dos pilares fundamentales. *El origen de las especies*, de Charles Darwin, que enmarca el modo en que se analizan los problemas biológicos, y el *Principia* de Isaac Newton. Es difícil sobreestimar el impacto que este último trabajo tuvo en la historia de las ideas. También sería injusto acotar su impacto a las ciencias Físicas. En este capitulo vamos a discutir en que sentido el *Principia* afecta en forma profunda nuestra visión del mundo.

La primera edición del Principia data del 1687, con dos ediciones posteriores en 1713 y 1726. En esta obra, Newton propone un conjunto de leyes rectoras del movimiento de los cuerpos. La primera de ellas consiste en la definición de un sistema inercial de coordenadas, que es aquel para el cual valdrá su paradigma. En tal sistema, en ausencia de interacciones, un cuerpo continuara con su estado dinámico. Esto es, si se encontraba moviéndose con cierta velocidad, permanecerá con esa velocidad. La segunda proposición de Newton es la siguiente: en presencia de una interacción que dependa de la posición y velocidad del cuerpo, el apartamiento del estado de velocidad constante, esto es, la aceleración, será inversamente proporcional a una propiedad del cuerpo llamada la masa, lo cual describimos como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{1}{m}\vec{F}\left(x, \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

Es interesante que si bien llamamos a esta afirmación la segunda ley de Newton, no es estrictamente una ley, ya que no está prescripto cómo calcular la fuerza. Podemos afirmar que es una definición del concepto de masa, y también podemos pensarla como un programa de investigación: "*Afirmo que van a poder encontrar una regla para calcular la aceleración de un cuerpo, sólo como función de la posición y velocidad en el presente. De este modo, una vez dilucidada esta ley, midan en un instante esa cantidad finita de información, y tendrán en sus manos el poder de predecir la evolución del sistema, para siempre*". ¿Cómo operaría tal maquinaria conceptual?

0. Mediante una batería de experimentos, se dilucida la regla que describe la fuerza experimentada por una partícula localizada en una dada posición y con una dada velocidad.
1. Se mide el par $\left(\vec{x}(t=0), \frac{d\vec{x}}{dt}(0)\right)$
2. Se computa el avance del tiempo en un cantidad pequeña:

$$\vec{x}(t = \Delta t) \approx \vec{x}(t = 0) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t = 0)\Delta t,$$

lo cual puede hacerse porque se conoce la velocidad inicial, que fue medida. Pero más interesante aún, como se conoce la aceleración *en todo punto del espacio*, *para cualquier velocidad del cuerpo*, *es posible computar la velocidad en ese nuevo instante*:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta t) \approx \frac{d\vec{x}}{dt}(t=0) + \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{x}(t=0), \frac{d\vec{x}}{dt}(t=0)\right)\Delta t.$$

Si bien esto no es necesario para saber la posición del cuerpo en el instante Δt, este cómputo permite *repetir el procedimiento* y calcular la posición de la particular en $t = 2\Delta t$:

2´. Se incrementa el tiempo en Δt a partir de $t = \Delta t$:

$$\vec{x}(t=2\Delta t) \approx \vec{x}(t=\Delta t) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta t)\Delta t,$$

y nuevamente, como al conocerse la aceleración en todo punto del espacio, para cualquier posición y velocidad del cuerpo, es posible calcular la velocidad en el nuevo instante:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t=2\Delta t) \approx \frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta \mathrm{t}) + \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{x}(t=\Delta t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta t)\right)\Delta t.$$

Esta prescripción puede entonces iterarse una y otra vez, lográndose una lista tan extensa como deseemos de valores para las variables que describen al problema.

Pero notemos que este procedimiento implicó un cambio dramático de lo que podemos pretender de una descripción del mundo. En lugar de leyes que resuman un conjunto de observaciones, esta prescripción nos invita a crear dispositivos conceptuales operacionales, capaces de predecir la evolución del sistema en estudio.

El impacto que tuvo en su momento esta aproximación a la física es difícil de percibir. El entusiasmo de Laplace ayudó a difundir las ideas de Newton en el continente europeo. Laplace llamaba a este paradigma “el sistema del mundo”, y no dejaba de señalar sus consecuencias filosóficas. Según este paradigma, nos quedaba la tarea de dilucidar las reglas de interacción entre las partículas del universo, medir “condiciones iniciales”, y el conocimiento de un futuro absolutamente determinado estaba a nuestro alcance.

I. 2. Una mirada Newtoniana a la neurociencia.

Hay dos aspectos de la descripción Newtoniana que se han transformado en un estándar para la descripción de la naturaleza. Uno consiste en la búsqueda de leyes expresables en términos de la tasa de variación de las variables que describen el problema. Pero hay que tener en cuenta que la descripción Newtoniana afirma algo mas: que las reglas que determinan esas tasas de variación dependen del valor de las variables del problema "en el presente". La historia del problema, es decir los valores de las variables en tiempos anteriores, no son necesarios para determinar la tasa de variación de las variables. No sabemos, a priori, en qué medida, o para que problemas, tal descripción matemática será la adecuada para un problema. Mientras tanto, veamos una aproximación a la neurociencia *inspirada* por la aproximación Newtoniana. No habrá fuerzas, no se computarán aceleraciones, pero decimos que es una aproximación Newtoniana al problema en el sentido de describir la evolución temporal del mismo mediante la prescripción de la tasa de variación de sus variables. Prescripción que dependerá del valor de las mismas en el presente.

En física, la hipótesis atómica afirma que el mundo macroscópico emerge de la estadística sobre un conjunto de átomos regidos por estas leyes que acabamos de describir. Análogamente, en neurociencia el comportamiento emerge de acoplar un sistema nervioso con un sistema periférico y un entorno. El sistema nervioso esta formado por unas células especiales, con propiedades dinámicas muy ricas: las neuronas. La característica principal de estas células es la excitabilidad eléctrica de su membrana plasmática. Esta propiedad permite la conducción de impulsos nerviosos. El mecanismo por el cual se producen desbalances eléctricos en la membrana depende de ciertos canales en la membrana celular que permiten el pasaje de distintos iones entre el interior de la célula y el entorno en el que esta embebida.

En los años 50 del siglo XX, Hodgkin y Huxley escribieron el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales, para dar cuenta de la tasa de variación del voltaje a través de la membrana celular de una neurona:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{dt} = I - g_K n^4 (V - E_K) - g_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) - g_i (V - E_i) \\ \dfrac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V) n \\ \dfrac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V) m \\ \dfrac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V) h \end{cases}$$

Donde *V* es el voltaje, *I* la corriente a través de un parche de la membrana y (*n, m, h*) variables que describen el estado dinámico de los canales involucrados. No es importante en esta discusión describir el significado de estas ecuaciones. Pero si subrayamos que el espíritu de este modelo esta inspirado en Newton: dadas las condiciones iniciales, podemos evolucionar y describir el estado eléctrico de una neurona. Acoplando muchas de ellas, el de un sistema nervioso. Si bien el propósito de este sistema de ecuaciones no es determinar la posición de ningún cuerpo y las leyes de Newton no tienen competencia en este asunto, el modelo de ciencia en la que Hodgkin y Huxley pensaron para la neurociencia es, sin dudas, Newtoniano.

[Sección eliminada para adaptar el material al curso]

¿Es posible tomar un problema no lineal, y mapearlo en uno lineal, sencillo de resolver?

Vamos a diferir la respuesta a esta pregunta, pero adelantamos que es mejor no hacerse demasiadas ilusiones. De hecho, la búsqueda de *soluciones analíticas* (esto es, *expresables en términos de formulas cerradas*) fracasó ni bien se intentó atacar problemas apenas más complicados que el de los dos cuerpos. Sin ir mas lejos, basta con agregar un cuerpo al problema, lo que se conoce como el problema de tres cuerpos interactuantes mediante la gravitación. De este atolladero se salió cambiando la estrategia y las preguntas. Pasando del cálculo a la topología, de las soluciones analíticas a afirmaciones cualitativas. De preguntarse cosas como:

¿Donde estará cada una de estas tres partículas en t*?

A preguntarse otras, como:

¿Es el sistemas estable? ¿Existen trayectorias periódicas?

I.4. Vocabulario

Dentro de los sistemas dinámicos (esto es, de las reglas que dan cuenta de la evolución temporal de un problema), nos enfocaremos en aquellos descriptibles mediante ecuaciones diferenciales, esto es, aquellos sistemas en los cuales el tiempo es considerado una variable continua. En algún momento emplearemos el concepto de mapa, que se refiere a la evolución temporal en términos de inspecciones discretas, llevadas a cabo cada cierta cantidad finita de tiempo, pero nuestro foco ahora está en las ecuaciones diferenciales.

Este curso se concentrará fundamentalmente en ecuaciones diferenciales ordinarias, esto es, aquellas en las que hay una sola variable independiente: el tiempo. Esto es, nos concentraremos en ecuaciones como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

a diferencia de los problemas de tipo

$$\phi_{xx} = \phi_t.$$

[Sección eliminada para adaptar el material al curso]

Si nos encontramos con ecuaciones diferenciales involucrando una derivada de orden mayor, nuestro primer paso será $\phi\phi$ reescribir la ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales, cada una de ellas de orden uno. Por ejemplo, la celebrada ecuación que rige la dinámica de un oscilador con disipación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

se reescribirá como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello definimos $v \equiv {}^{dx}/_{dt}$, lo que da lugar a:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}(-\beta v - kx) \end{cases},$$

que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

I.5. Ecuaciones lineales y no lineales.

En los sistemas de ecuaciones de primer orden que acabamos de presentar, el lado derecho es un arreglo de funciones $(f_1, f_2, \ldots f_N)$ al que denominamos campo vector.

Ejemplo. En el caso de nuestro oscilador amortiguado, el campo vector se escribe:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m}(-\beta v - kx) \end{pmatrix}.$$

Si el campo vector es una función lineal de las variables decimos que el sistema es lineal. En caso contrario, decimos que el sistema dinámico es *no lineal.* El ejemplo que acabamos de presentar corresponde pues a un campo vector lineal.

Ejemplo. En el caso del péndulo físico, la ecuación de Newton que rige el comportamiento del sistema es:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin(\theta),$$

lo cual puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del siguiente modo. Definiendo $\Omega \equiv {}^{d\theta}/_{dt}$,

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \Omega \\ \dfrac{d\Omega}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin(\theta) \end{cases},$$

de modo que el campo vector resulta ser

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \Omega \\ -\frac{g}{l}\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Como las componentes de $\vec{F}$ son funciones no lineales de las variables del problema (θ, Ω), decimos que el sistema dinámico es no lineal.

I.6. Trayectorias

El desafío de la dinámica es dilucidar tanto como sea posible las trayectorias sin recurrir a expresiones analíticas (i.e. en términos de formulas cerradas), para las variables del problema. Vamos a precisar a que nos referimos, entonces, por trayectorias. Y para hacerlo, debemos primero definir el "espacio de fases" de un problema.

Definición: El espacio constituido por las variables en término de las cuales está dada la prescripción determinista que rige la dinámica del problema, se conoce como *espacio de fases*. En nuestro ejemplo anterior, el espacio de fases es el constituido por (θ, Ω). En ese espacio, el dibujo de $\theta(t), \Omega(t)$ correspondiente a seguir la evolución de una condición inicial dada se conoce como *trayectoria*.

Observación

Si existe una dependencia explícita con el tiempo del campo vector que define a un sistema dinámico, podemos llevarlo a otro autónomo (esto es, sin que exista una dependencia explícita con el tiempo), ampliando la dimensión del problema. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento a seguir:

Ejemplo Sea un oscilador lineal con amortiguamiento, forzado periódicamente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F\cos(t)$$

Esto puede escribirse como un sistema de orden dos, con una dependencia explicita del tiempo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(-\beta v - kx + F\cos(t)\right) \end{cases},$$

o, si pagamos el precio de incrementar la dimensionalidad del sistema, como un sistema autónomo con una dinámica trivial para una nueva variable z;

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(-\beta v - kx + F\cos(z)\right). \\ \dfrac{dz}{dt} = 1 \end{cases}$$

La sencillez del procedimiento no debe confundir: los cambios que puede presentar la dinámica de un sistema al incrementarse la dimensionalidad son dramáticos. Dinámicas imposibles en dos dimensiones son plausibles en dimensión tres, como veremos más adelante.

I.7. ¿Qué puede pasar en un sistema lineal? ¿Y en uno no lineal?

I.7.1. Un sistema lineal.

Un sistema lineal es atacable porque puede desglosarse en problemas sencillos. Procedemos entonces a resolver esos problemas sencillos para luego recuperar la solución del sistema original mediante la superposición de los anteriores. En un sistema no lineal, en cambio, las partes cooperan, interfieren, se potencian… enriqueciendo la dinámica.

Comencemos por el sistema lineal más sencillo. La dimensionalidad más baja concebible para describir una dinámica (uno!), y un campo vector lineal:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

donde a es un parámetro real, x una variable real, y $\frac{dx}{dt}$ es la rapidez de cambio de la variable dinámica. En esas condiciones, sucede que **1.** si K es un número real,

$$x(t) = Ke^{at}$$

es solución, ya que

$$\frac{dx}{dt} = aKe^{at} = ax(t).$$

Además, se cumple que **2.** Esa solución es única. En efecto, si $u(t)$ es solución, podemos construir la cantidad $u(t)e^{-at}$ y, calculando su derivada, tenemos que

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^{-at}) = \frac{du}{dt}e^{-at} + u\, e^{-at}(-a) = e^{-at}\left(\frac{du}{dt} - au\right)$$

y este último término es cero pues u es solución. Así,

$$u(t)e^{-at} = constante,$$

que equivale a decir que

$$u(t) = Constante\ e^{at} = Ke^{at}$$

Por último, hay una solución particular muy interesante del sistema. Si $u(t=0) = 0$, entonces $x(t) = 0$ para todo tiempo.

En la Figura 1 se ven los gráficos correspondientes *a tres soluciones representativas* (vayamos coleccionando preguntas: ¿cuántas soluciones son representativas del conjunto de soluciones de un sistema dinámico?). A la derecha, dibujamos un esquema del espacio de fases, en el cual superponemos el dibujo de un par de trayectorias particulares. ***El dibujo de trayectorias particulares representativas en el espacio de fases se conoce como retrato de fases.***

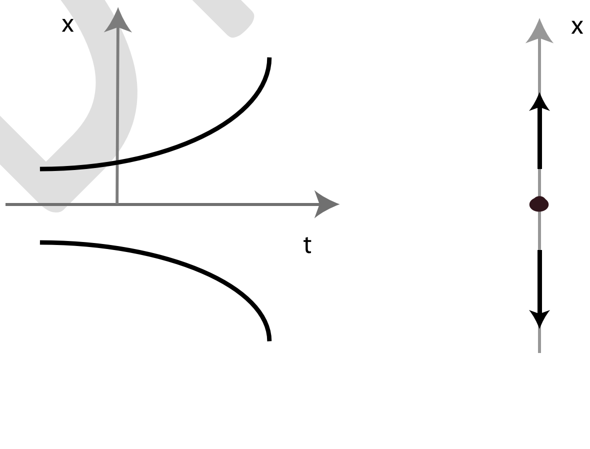

Figura 1. Esquema de soluciones del problema (a la izquierda), y un esquema del espacio de fases con trayectorias representativas superpuestas, esto es, un retrato de fases.

I.7.2 **Y si incluimos una no linealidad ¿Qué cambia?**

El problema lineal presentado antes puede pensarse como el modelo más ingenuo para describir la dinámica de una población: en su versión mas sencilla, la tasa de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño. Si la constante de proporcionalidad tiene una contribución positiva dada por la tasa de natalidad, y una negativa dada por la tasa de decesos, el modelo prevé, para valores positivos de la constante de proporcionalidad, un crecimiento exponencial. Este razonamiento, expuesto por Malthus en el siglo XIX, fue el disparador de la primera alarma sobre los riesgos de la superpoblación del planeta. Sin embargo, para cualquier modelo mínimamente realista de crecimiento poblacional, la tasa de crecimiento comienza a decrecer a partir de cierto valor de la población. Esto puede ser capturado por la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right).$$

Notemos que para $x \ll N$, la ecuación puede aproximarse por la ecuación lineal discutida previamente, mientras que para x grandes, el termino no lineal no puede despreciarse. N se conoce como la “capacidad de carga”, y juega el rol de una población ideal, en el sentido de que para poblaciones mayores que N, el crecimiento es negativo. Si N=1, x representa una fracción de población. Vamos a analizar esta ecuación mediante cuatro estrategias distintas.

I.7.2.1. Sucumbamos a la tentación de buscar una solución analítica para este problema. De hecho, encontraremos que, en efecto, esta ecuación puede resolverse analíticamente. Escribiendo:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt$$

$$\int dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = at + c = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$$

y si *x<1*, entonces

$$\frac{x}{1-x} = Ke^{at}$$

lo cual lleva a que

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1 + Ke^{at}},$$

con

$$K = \frac{x(0)}{1 - x(0)}.$$

En este caso, pudimos escribir para x entre 0 y 1 una solución analítica (¿dónde usamos esa condición? ¿Vale esta expresión para x>1?). Independientemente de lo gratificante que resulte, no es trivial extraer propiedades de la solución de esta expresión. Vamos a intentar estrategias alternativas que sirvan en este caso y que además puedan sobrevivir a la imposibilidad de construir una expresión analítica para la solución.

I.7.2.2. La siguiente figura muestra primero el espacio de fases del problema (unidimensional). Abajo, se muestra en forma auxiliar, al campo vector f(x) de nuestro sistema dinámico. La línea punteada hace referencia a que no es un espacio de fases bidimensional: tenemos un espacio de fases unidimensional y un gráfico auxiliar dibujado en forma perpendicular al mismo, que representa el campo vector como función de las variables del espacio de fases.

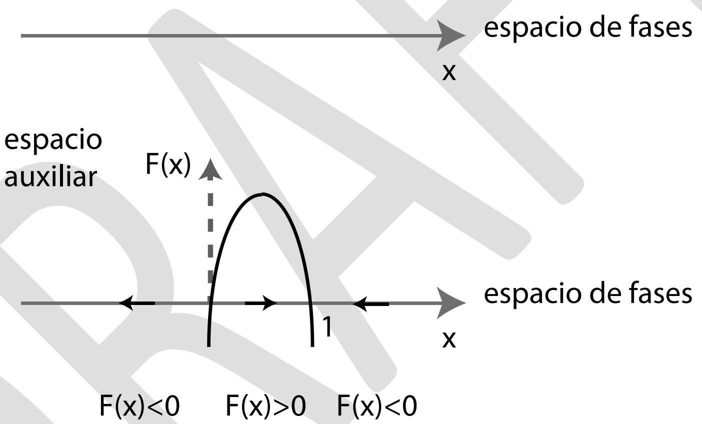

Figura 2. Espacio de fases de nuestro sistema y grafico auxiliar para dar cuenta de los valores de la tasa de variación de la variable en las distintas regiones del espacio de fases.

Notemos que entre x=0 y x=1, $f(x)$>0, y por lo tanto, dx/dt>0. Por el contrario, si x<0, o si x>1, entonces se cumple que $f(x)$<0, y por lo tanto dx/dt<0. Los puntos x=0 y x=1 presentan la particularidad de que $f(0)=f(1)=0$. Por lo tanto, dx/dt=0, y eso implicara que los valores de x permanecen constantes. **Esos puntos se conocen como puntos fijos.** Lo que podemos inferir de este análisis entonces es que existen dos soluciones estacionarias (esto es, si la condición inicial toma alguno de esos valores, el valor de la variable no cambia). Por el contrario, cualquier otra condición inicial evoluciona en el tiempo. Particularmente atractivo es inspeccionar lo que ocurre en los entornos de los puntos fijos. Una solución ligeramente positiva, cercana al *x*=0, evolucionara de tal modo de que *x* crezca. Claro que nunca podrá alcanzar el valor *x*=1*. ¿Por qué?*

I.7.2.3 El tercer modo que proponemos para intuir la estructura de las funciones pasa por generar un gráfico de la variable en función del tiempo, tal como se bosqueja en la Figura 3. Las pendientes pueden bosquejarse en este grafico, ya que tenemos la ecuación diferencial que prescribe, para cada punto del espacio de fases *x* (independientemente del tiempo, en nuestro caso), el valor de la derivada de una trayectoria que pase por él. De este modo, uno puede mostrar en el grafico de *x* vrs. *t*, un conjunto de segmentos con pendientes iguales a las prescriptas por el campo vector en cada punto. Las soluciones deberán presentar, en cada punto, tangentes orientadas como los segmentos ilustrados.

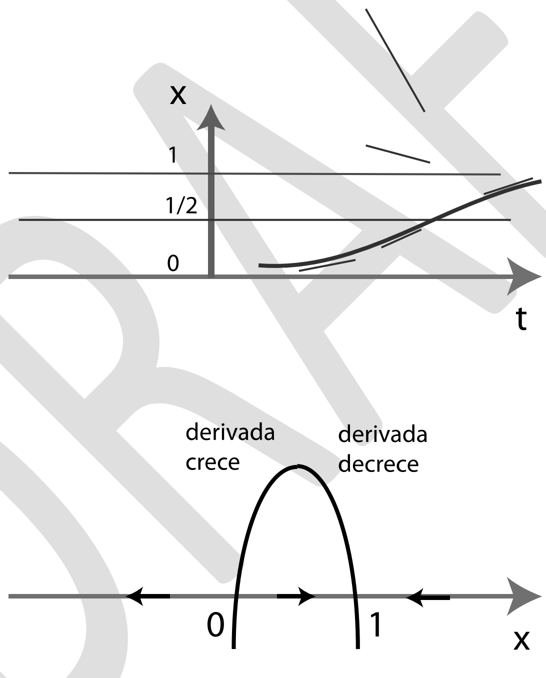

Figura 3. Bosquejo de la evolución de la variable en función del tiempo, inferida del valor esperado para las tangentes de la función, a distintos valores de *x*

I.7.2.4 En nuestro cuarto método nos proponemos avanzar en una primera descripción cuantitativa sobre la dinámica del sistema, explorando lo que ocurre en la vecindad de los puntos estacionarios. Esto es posible ya que podemos aprovechar nuestro conocimiento de la dinámica de los sistema lineales unidimensionales y estudiar *aproximaciones lineales al sistema en el entorno de los* *puntos estacionarios*. En nuestro problema, los puntos x=0, x=1 son estacionarios (ya que el campo vector se anula en ellos, y por lo tanto la tasa de crecimiento de la variable es nula). Si describimos a la variable en el entorno del primer punto como una perturbación pequeña ε al valor estacionario, truncando el desarrollo de Taylor a partir del orden dos, tenemos:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\varepsilon,$$

Ecuación lineal que sabemos resolver y que indica que el comportamiento en el entorno de cero consiste en alejarse exponencialmente rápido del mismo. Análogamente, cerca de x=1, la solución puede escribirse como $x(t) = 1 + \varepsilon(t)$. De este modo, la ecuacion para el comportamiento de la variable que describe el apartamiento de la posición de equilibrio es

$$\frac{d(1+\varepsilon)}{dt} = a(1+\varepsilon)\big(1-(1+\varepsilon)\big) = a(1+\varepsilon)(-\varepsilon) = -\varepsilon a - a\varepsilon^2 \approx -\varepsilon a,$$

lo cual indica que las soluciones con valores iniciales en la vecindad del punto $x(t) = 1$ decaerán al punto estacionario.

En rigor, lo que hemos hecho es estudiar problemas "similares" en ciertas zonas del espacio de fases y asumido que sus soluciones dan pistas sobre el problema original. Pero ¿Es eso obvio? Seguimos coleccionando preguntas. Ahora,

¿Es posible aproximar a las soluciones de un problema no lineal por aquellas del problema linealizado?

I.8. Un primer acercamiento a la linealización

Sea x^* un punto estacionario, y sea η la variable que mide pequeños apartamientos de ese punto. Entonces podemos escribir para la dinámica de la perturbación que

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d(x(t)-x^*)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x^*+\eta) = f(x^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*}\eta + O(2),$$

con $f(x^*) = 0$ y, por lo tanto,

$$\frac{d\eta}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*}\eta + O(2).$$

Si $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*} \neq 0$, despreciamos el término cuadrático. Así, el factor $1 \Big/ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*}$ es un tiempo característico que describe la tasa de crecimiento (decrecimiento) del (al) estado estacionario. Al menos en este problema, emparentado con el original, cuyas soluciones aspiramos poder mostrar, son buenas aproximaciones a las verdaderas de nuestro problema.

Observación La linealización de un sistema es algo que tenemos incorporado desde que forjamos nuestras primeras armas en los cursos de física básica. Uno de los primeros problemas que resolvemos es el movimiento de un péndulo para pequeños apartamientos. Cuando derivamos las ecuaciones de ese problema, comenzamos con el péndulo físico, cuya dinámica esta regida por:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgsin(\theta) = 0,$$

donde el término no lineal, sinusoidal, proviene de proyectar el peso de la partícula suspendida en la dirección tangente a la trayectoria circular a la que el péndulo debe someterse debido a los vínculos. Es entonces que aproximamos, para pequeños apartamientos:

$$sin\theta \approx \theta,$$

dando lugar a este nuevo problema

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0.$$

¿Serán las soluciones de este problema buenas aproximaciones a las soluciones del problema original? Nos llevará un buen tramo llegar a atacar esta pregunta. Sin embargo, podemos adelantar alguna sorpresa.

Ejemplo Sea la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sin(\theta)$$

Los puntos fijos vienen dados por $\theta = n\pi$. Como

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*} = -\cos(\theta) = \begin{cases} -1, n = 2k \\ 1, n = 2k+1 \end{cases},$$

resulta que si *n* es par, el punto fijo será estable.

Es interesante detenerse a pensar si hemos visto un sistema físico regido por esta ecuación. Podemos emparentarla a esta otra ecuación diferencial,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\,sin(\theta) = 0,$$

a la que reconocemos como la que rige el comportamiento de un péndulo físico en presencia de disipación (cuantificada a través del parámetro b).

La diferencia entre estos dos problemas está en el término que incluye la derivada segunda (el termino inertivo), que no está presente en nuestro problema original. Nuestra experiencia, en el mundo macroscópico en que vivimos nos indica que, en presencia de disipación, un sistema se comporta como si pudiésemos despreciar el término inertivo. Tal es así que por miles de años el hombre ha creído que la mejor descripción de la naturaleza era una en la cual los cuerpos vuelven al reposo en ausencia de fuerzas aplicadas. Por otro lado, eliminar el término inertivo no es tan sencillo como pensar que la masa es despreciable. Después de todo, también la masa es la que determina la fuerza sobre la partícula, a través de su proporcionalidad con el peso. De modo que vale la pena preguntarse: ¿Como elegir la combinación de parámetros que permita, rigurosamente, aproximar nuestro problema, descrito por una ecuación de segundo orden, por otro descrito por una de primer orden? La pregunta es crucial, porque gran parte de lo que un sistema puede mostrar, en términos de su dinámica, tiene que ver con la dimensionalidad del espacio de fases.
En otras palabras:

¿Cómo afectan nuestros parámetros a la dimensionalidad efectiva de nuestro problema?

I.9. Ecuaciones diferenciales y determinismo

El programa Newtoniano (que Laplace llama "el sistema del mundo") implica que conocer condiciones iniciales y un conjunto de reglas, lleva a la posibilidad de hacer predicciones unívocas sobre la dinámica de un problema. El lenguaje de los sistemas dinámicos resulta entonces natural para esta descripción, en la medida en que podamos garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de los mismos.

Sea

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$
$$x(0) = x_0$$

con x real, y tanto $f(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$, continuos en un intervalo alrededor de x_0. Entonces, existe una solución en un intervalo $(-T, T)$ de T=0 y la solucion es única.

No daremos la demostración de este teorema de existencia. Solo mencionaremos que consiste en construir una sucesión de funciones u_k y demostrar que esa sucesión converge uniformemente a una solución.

[Pa

[Sección eliminada para adaptar el material al curso]

Referencias comentadas.

El problema de dos cuerpos puede consultarse en [Taylor, 2005]. La introducción a los sistemas lineales presentada en el capítulo puede profundizarse con el material en [Hirsh, Smale & Devaney, 2012]. Una de las más completas e intuitivas presentaciones a los sistemas dinámicos unidimensionales puede encontrarse en [Strogatz, 2014]. El trabajo de Hodgkin y Huxley [Hodgkin & Huxley, 1952], que les valiera el premio nobel de fisiología, es un imperdible. El capítulo comienza argumentando que “El origen de las especies” de Darwin y el “Principia” de Newton son los pilares de la ciencia occidental. Todo estudiante de ciencias debe rendirse a la tentación, darse el gusto, y leerlos.