

II.1 Bifurcaciones.

En el sistema lineal unidimensional que estudiamos en el primer capítulo (sección I.7.1) había un solo punto estacionario para cualquier valor del parámetro a (exceptuando el caso $a=0$, para el cual todo el espacio de fases está compuesto por puntos fijos). Esto resulta obvio si recordamos que los puntos estacionarios son aquellos para los cuales las derivadas son nulas, lo que nos lleva a inspeccionar las intersecciones de la función $G(x) = ax$ con el eje x (Figura 4a). Ahora, si exploramos las intersecciones entre un campo vector no lineal y el eje x , **puede haber más de un punto estacionario aislado**. En la figura 4.b. se ilustra el espacio de fases del campo vector $F(x) = r + x^2$:

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2$$

$r \in \mathbb{R}$

Notemos que para $r > 0$ no hay intersecciones entre el campo vector y el eje x . Cuando $r = 0$, el sistema presenta un punto estacionario. Para $r < 0$ hay dos; los dos puntos en los cuales la parábola interseca al eje x . El cambio en la cantidad de puntos fijos ante la variación de parámetros produce *cambios cualitativos* en el conjunto de soluciones del problema (lo que se llama el *flujo del sistema*).

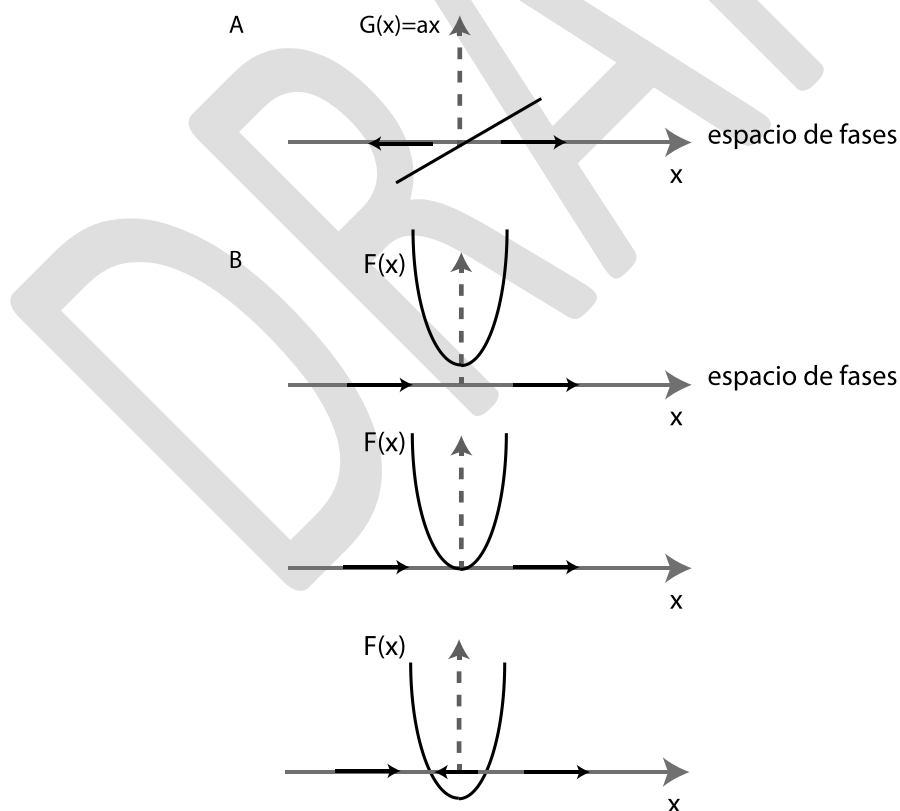


Figura 4. a. El campo vector lineal $G(x) = ax$ tiene un solo punto fijo para todos los valores de su parámetro, salvo en el caso excepcional en el cual el parámetro a

vale cero. b. El campo vector no lineal $F(x) = r + x^2$, presenta una cantidad variable de puntos fijos para distintos valores de su parámetro r .

Cuando ocurre uno de esos cambios cualitativos en el flujo, estamos en presencia de una bifurcación.

II.2 Representando una bifurcación

En la figura 5 mostramos otra representación gráfica para un sistema que sufre una bifurcación. Es una buena representación, porque condensa la información contenida en los distintos gráficos de la Figura 4b. Primero, calculamos los puntos fijos x^* tales que $F(x) = 0$, en función del parámetro de control. En nuestro caso, $x^* = \pm\sqrt{-r}$. Del comportamiento de $F(x)$ en las distintas zonas del espacio de fases que quedan separadas por los puntos fijos, inferimos que cuando existen dos puntos fijos, el de $x > 0$ es inestable, mientras que el de $x < 0$ es estable.

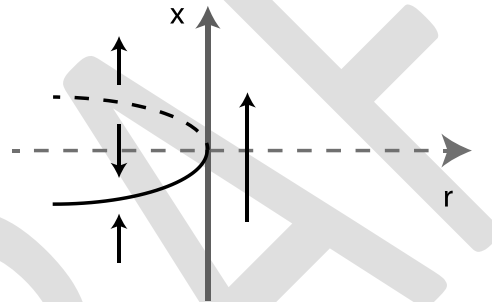


Figura 5. Diagrama de bifurcaciones para el sistema dinámico $\frac{dx}{dt} = r + x^2$.

Si recorremos la figura de izquierda a derecha, vemos que los puntos fijos se acercan entre sí. Colisionan finalmente, para $r = 0$, en un punto fijo cuyo comportamiento lineal es singular, es decir, para el cual $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*} = 0$.

Recorramos el problema para todos los valores posibles de su parámetro de control r . Para $r > 0$ no hay puntos estacionarios, porque la función $F(x)$ no interseca al eje x . Para $r = 0$, la función $F(x)$ es tangente al eje, mientras que para $r < 0$, existen dos raíces. Es interesante observar, que esta ecuación sencilla puede pensarse como un representante paradigmático de un conjunto de problemas para los cuales $F(x)$ es una función “más rica”.

¿Será posible idear un mecanismo algorítmico, sistemático, para llevar a la función $F(x)$ de nuestro problema, a una función sencilla que presente los mismos comportamientos para los distintos valores de sus parámetros?

[Sección eliminada para adaptar el material al curso]

Ejemplo. Sea el campo vector

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = \omega - \cos(x)$$

$$r \in \mathbb{R}, x \in S^1$$

Los puntos fijos del sistema son los valores de x en los cuales $F(x) = \frac{dy}{dx} = 0$, lo cual ocurrirá cuando la función (constante) ω se intersecte con $\cos(x)$. En la figura 7 ilustramos dos casos, para distintos valores de ω . En el primero no existen intersecciones, pues $\omega > 1$, mientras que el $\cos(x)$ tomará valores de módulo siempre menor que uno. Cuando ω disminuye su valor por debajo de uno, aparecen dos puntos fijos. Nuevamente, una tangencia es la signatura de la transición. Notemos que para los valores de ω para los cuales hay dos puntos fijos, uno es estable y el otro es inestable. Cuando ambos colisionan, el punto fijo resultante no es ni estable ni inestable.

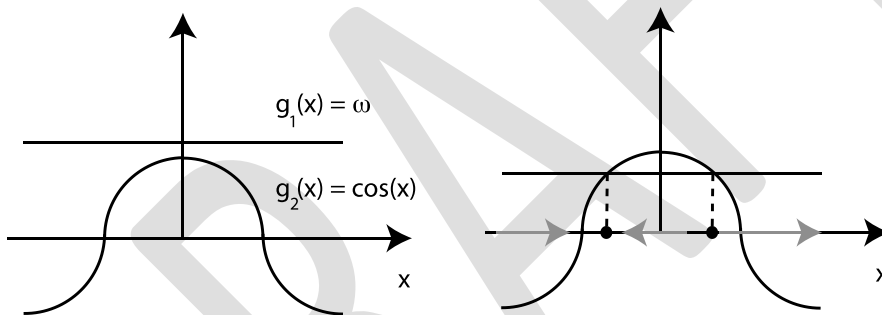


Figura 7. La aparición de un par de puntos fijos, cuando el parámetro ω en el sistema $\frac{dx}{dt} = \omega - \cos(x)$ disminuye su valor (panel de la derecha). El punto fijo de la izquierda, es estable, mientras que el de la derecha, es inestable.

Un modo de inferir esta estabilidad es inspeccionando el valor de la diferencia entre ω y $\cos(x)$ a la izquierda y a la derecha de cada punto estacionario. Por ejemplo, para el punto de la izquierda, la diferencia entre estas funciones es positiva para valores de la variable a la izquierda del punto estacionario y negativa para valores mayores al mismo. De ese modo, una condición inicial en el entorno del punto estacionario volverá al mismo. Por ese motivo, podemos afirmar que el punto estacionario es estable. Un análisis equivalente puede llevarse a cabo para el punto estacionario de la derecha, que resulta ser inestable.

También podemos hacer un análisis distinto para estudiar la estabilidad del sistema. Notemos que podemos “descomponer” al campo vector en dos términos

(esto es, $\frac{dx}{dt} = \omega - \cos(x) = g_1(x) - g_2(x)$, con $g_1(x) \equiv \omega, g_2(x) \equiv \cos(x)$), la condición de tangencia entre las mismas puede expresarse así;

$$\frac{d(\omega)}{dx} = 0 = \frac{d(\cos(x))}{dx}, \text{ de donde } x = 0 \text{ o } x = \pi.$$

Así, si $\omega = 1 \Rightarrow x = 0$.

De este modo, en el entorno de $\omega = 1, x = 0$, podemos escribir un sistema dinámico en el cual el campo vector se simplifica mediante el truncado del desarrollo de Taylor del término exponencial:

$$\frac{dx}{dt} = \omega - \cos(x) = 1 + \epsilon - \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \right\} = \epsilon + \frac{x^2}{2!} + O(4)$$

$$\frac{dx}{dt} \approx \epsilon + \frac{x^2}{2!}.$$

Notemos que este sistema es análogo al que hemos estudiado al comienzo del capítulo. Por este motivo, nos hacemos la siguiente pregunta:

[Sección eliminada para adaptar el material al curso]

¿Será posible, para algunos valores de los parámetros, transformar estas ecuaciones en la ecuación sencilla con la que empezamos el capítulo? Después de todo, parece existir una fuerte similitud en el modo en que los puntos fijos nacen o mueren de a pares.

Antes de presentar una nueva bifurcación, es apropiado hacer una observación más. Si bien es posible que nunca nos hayamos encontrado con estas ecuaciones, la dinámica subyacente es algo con lo que seguramente estamos familiarizados. Imaginemos que tomamos nuestro sistema para valores suficientemente bajos del parámetro ρ , de modo hay un solo punto fijo (el de valor bajo). Si ahora comenzamos a aumentar el parámetro, no es sino hasta que cruzamos por segunda vez a nuestra curva parametrizada que abandonamos nuestro estado. Si bien para el valor de ρ en el que cruzamos por primera vez la curva parametrizada el punto fijo de valor alto ya existe, nuestra condición inicial hace que permanezcamos en el punto fijo de valor bajo. No es sino hasta que éste desaparece que saltamos al punto fijo de valor alto. Por otra parte, si ahora disminuimos el valor de ρ , no volvemos al punto fijo bajo cuando nace éste, sino cuando desaparece el punto fijo alto. Este fenómeno, por el cual el sistema responde en forma diferente ante un cambio de parámetros dependiendo de su historia, lo conocemos como **histéresis**.

II.6. Bifurcación transcítica.

En el marco de pensar en clasificar sistemas dinámicos en función de los términos presentes en sus desarrollo de Taylor, notemos que en el caso anterior, el campo vector *no tenía componentes que incluyeran al parámetro y la variable*

multiplicativamente. El primer ejemplo de sistema no lineal analizado en el capítulo anterior, en cambio, lo tenía:

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2$$

En este caso, tenemos siempre dos puntos fijos (salvo para $r = 0$); $x = 0, x = r$. El cambio cualitativo que sufre el sistema es el intercambio de estabilidad entre el punto fijo nulo y otro no nulo.

La figura 9 muestra el campo vector en el eje auxiliar al espacio de fases, así como el diagrama de bifurcaciones del problema.

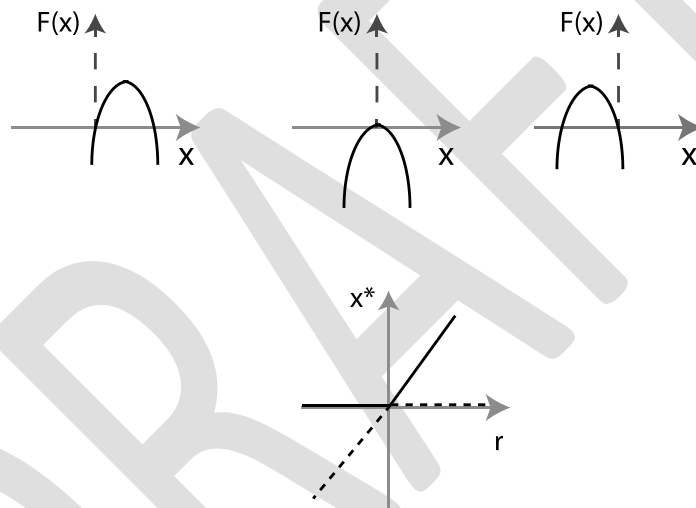


Figura 9. El campo vector para la bifurcación transcritical (arriba), y el diagrama de bifurcaciones de la misma (abajo).

II.7. Bifurcación de pitchfork, o tridente.

El último sistema dinámico sencillo que presentaremos en esta introducción es

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$$

con $x, \mu \in \mathbb{R}$.

Este sistema no tiene ni términos cuadráticos, ni de orden cero en su desarrollo. De hecho, que la no linealidad más baja sea de orden 3 es reflejo de una restricción impuesta al sistema. Notemos que esta ecuación es invariante ante el cambio x por $-x$:

$$\frac{d(-x)}{dt} = \mu(-x) - (-x)^3 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu(x) - x^3$$

Ahora bien, los puntos estacionarios son $x = 0$, que vale para todo valor de los parámetros, y $x^* = \pm\sqrt{\mu}$. Y si estudiamos la estabilidad de estos puntos fijos, veremos que cuando el parámetro toma valores positivos, las soluciones no nulas que nacen son estables. Podemos ganar intuición graficando el sistema auxiliar:

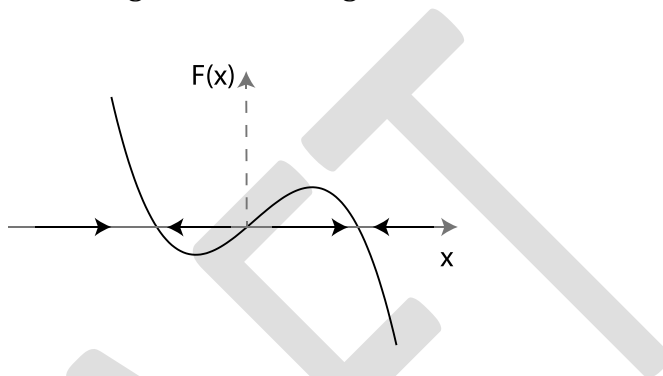


Figura 10. El campo vectorial para la bifurcación de pitchfork.

Podemos calcular la estabilidad de estas soluciones estudiando el problema linealizado (siempre bajo la hipótesis de que las soluciones del sistema linealizado dan una buena idea de como serán las trayectorias del sistema original);

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mu\varepsilon - 3x^2|_{x=\pm\sqrt{\mu}}\varepsilon = -2\mu\varepsilon$$

lo que indica que las soluciones que nacen cuando el parámetro es positivo (y que son los puntos en los cuales estamos evaluando las derivadas), son estables.

Notemos que estas soluciones **no son simétricas**: la simetría del problema se refleja en el hecho de que si existe una, existe una compañera simétrica conjugada, pero **cada solución en si tiene menos simetría que el problema**. Esto se conoce como *ruptura espontanea de simetría*. El problema no ha sufrido ninguna perturbación que rompiera la simetría. Sin embargo, las soluciones no son simétricas. Lo que la asimetría de la solución refleja, es la asimetría de la condición inicial y no la del problema que, una vez mas, preserva la simetría. El diagrama de bifurcaciones se ilustra en la figura 11.

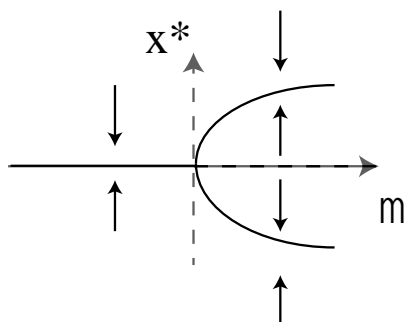


Figura 11. Diagrama de bifurcaciones de la bifurcación de pitchfork.

Supongamos una placa como la de la figura 12, sometida a una carga vertical. En la medida en que la placa sea simétrica y la carga sea perfectamente vertical, el problema presenta reflexión especular. Si la carga es negativa (lo que equivale a estirar la placa), o positiva, pero siempre menor que cierto valor umbral, la placa mantiene su forma plana. Mas allá de ese umbral, la placa se deformará. Si describimos dicha deformación en términos de un campo, observamos que para valores pequeños de la carga (pero mayores que el valor umbral), el campo puede expresarse en forma aproximada como

$$\phi(z, t) = x(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} z\right).$$

Es precisamente la dinámica de la variable x la que describimos con el sistema dinámico del inicio de esta la subsección. La figura 12 ilustra estas definiciones.

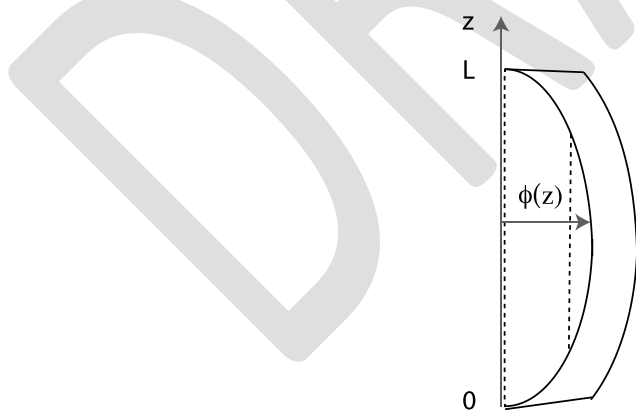


Figura 12. Placa elástica deformada ante una carga vertical.

El problema elástico con el que comenzamos, como todo problema de mecánica del continuo, es describible mediante una ecuación diferencial a derivadas parciales: ¿Cómo es posible entonces reducir la dinámica a una ecuación como

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3?$$

Un caso cualitativamente distinto al de las rupturas espontaneas de simetría es el de las *simetrías imperfectas*. En este problema, suponemos que algo en la configuración ya rompe la simetría: la placa está algo deformada por algún efecto de “memoria” del material, la carga no es exactamente vertical, etc. En tales casos, esperamos que las ecuaciones que rijan la dinámica de la variable x ya reflejen dicha imperfección. El termino de orden 0, o el cuadrático, ya podrán estar presentes:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 + \alpha_0 + \alpha_1 x^2$$

con $x, \mu \in \mathbb{R}$

Supongamos que el termino de orden cero es no nulo y el cuadrático es nulo. Los puntos estacionarios requerirán que $\mu x - x^3$ sea igual a $-\alpha_0$. Para los valores $\mu < 0$ esto da, como en el caso de simetrías perfectas, un único punto estacionario (si bien no en cero). Sin embargo, para valores suficientemente grandes del espacio de parámetros, aparecerá un par de puntos estacionarios en una bifurcación de nodo-repulsor. Esto ocurrirá cuando

$$\frac{d(\mu x - x^3)}{dx} = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{\mu}{3}}$$

y el valor de α_0 para el cual esto ocurre se puede calcular evaluando la función $f(x) = \mu x - x^3$ en ese valor de x^* :

$$\begin{aligned} \mu x^* - x^* x^* x^* &= \frac{2\mu}{3} \sqrt{\frac{\mu}{3}} \Rightarrow \\ -\alpha_0 &= \frac{2\mu}{3} \sqrt{\frac{\mu}{3}} \end{aligned}$$

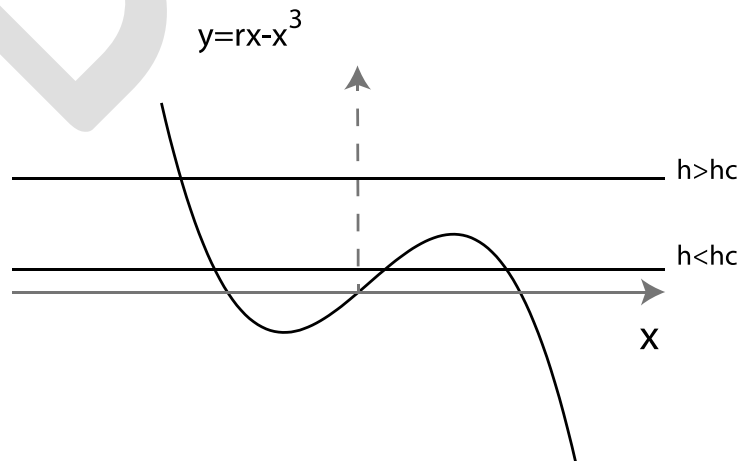


Figura 13. Para encontrar los estados estacionarios de una pitchfork imperfecta, analizamos los cruces entre una recta de pendiente cero que cruza al eje a distintos valores del eje y , con el campo vector de términos impares.

Dado un valor de asimetría α_0 , la secuencia de bifurcaciones que aparece al aumentar el parámetro μ se puede inferir de inspeccionar la posición en la que se intersectan la recta $y = -\alpha_0$ y la curva $y = x - \mu x^3$.

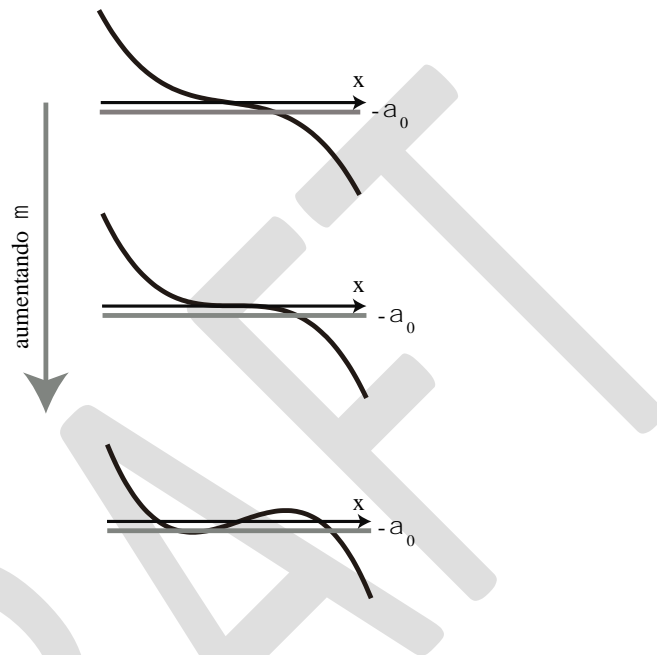


Figura 14. Para distintos valores del parámetro que acompaña al término lineal, existen uno o tres puntos fijos. Pero ahora dos surgen en una bifurcación de nodo-repulsor.

Vale la pena notar que, si bien para valores suficientemente grandes de μ se recupera una configuración similar a la simétrica, con un par de puntos fijos atractores prácticamente conjugados, estos no nacen al mismo valor de μ . Uno de ellos es el atractor que existe para todo valor de μ , y el otro nace en un nodo-repulsor con la solución inestable.

II.8. El origen dinámico de la baja dimensionalidad

Cualquier problema de la mecánica, aún el más sencillo, viene descrito por la ecuación de movimiento de Newton, que es una ecuación diferencial de segundo orden. Por otro lado, hasta ahora sólo hemos discutido ecuaciones de primer orden. ¿Tienen éstas alguna pertinencia en el marco de la mecánica? Nuestra primera aproximación a este problema, que revisaremos constantemente en el curso, será a través de un ejemplo.

Consideremos un péndulo físico embebido en un fluido viscoso contenido en un tambor rotante, como se muestra en la figura 15.

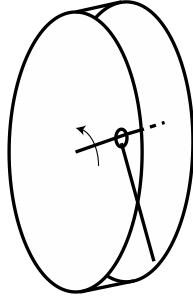


Figura 15. Péndulo físico embebido en un tambor lleno de un líquido viscoso.

Esta configuración nos permite someter al péndulo físico a un torque constante Γ . Supongamos que además, el sistema está sometido a un resorte de torsión, lo que agrega un torque variable $k\theta$ al sistema. En estas condiciones, la dinámica del péndulo viene descrita por

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mgL \sin(\theta) = \Gamma - k\theta.$$

Para una elección adecuada de la constante temporal, $\sin(\theta)$ y las derivadas temporales deberían ser del mismo orden. Para hacer el cambio de escala temporal, consideremos $t = T\tau$. Así,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{T d\tau},$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{T^2 d\tau^2}$$

Entonces, la ecuación queda:

$$\frac{L}{gT^2} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{b}{mgLT} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin(\theta) = \frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k\theta}{mgL}.$$

Si elegimos el parámetro T tal que:

$$\frac{b}{T} = mgL \Rightarrow T = \frac{b}{mgL}$$

el parámetro que acompaña al término de primer orden en la derivada es uno. Y por otro lado, con esa elección de T , el parámetro del término de segundo orden en la derivada queda:

$$\frac{L}{gT^2} = \frac{L^3 m^2 g}{b^2}$$

Ahora estamos en condiciones de pesar apropiadamente el primer término y el segundo. La condición para poder despreciar el término inercial es

$$m^2 \ll \frac{b^2}{gL^3}.$$

En estas condiciones, la dinámica del problema queda reducida a la ecuación:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k}{mgL}\theta - \sin(\theta)$$

El problema original requería dos condiciones iniciales para su solución. Sin embargo, la dinámica del problema quedó reducida a un caso unidimensional. ¿Qué ocurre con soluciones que difieran en el valor de la derivada primera?

La respuesta a este problema es muy interesante. Notemos que el problema en podría escribirse como

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k}{mgL}\theta - \sin(\theta)$$

o bien, escrita como un sistema de dos ecuaciones de primer orden, como

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \Omega \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(-\Omega + \frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k}{mgL}\theta - \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$

De este modo, salvo que estemos en la variedad definida por

$$-\Omega + \frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k}{mgL}\theta - \sin(\theta) = 0,$$

la tasa de variación de Ω es muy grande, de modo que las distintas condiciones iniciales de Ω decaen prácticamente a la misma posición de la variedad

$$-\Omega + \frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k}{mgL}\theta - \sin(\theta) = 0.$$

La primera condición para lograr el estado estacionario es, entonces, estar sobre la variedad. Esto permite que la segunda ecuación se anule. La segunda condición será que $W=0$, lo cual ocurrirá cuando la recta se encuentre con la senoide: $\frac{\Gamma}{mgL} - \frac{k}{mgL}\theta = \sin(\theta)$. En la figura 16 se muestra este escenario.

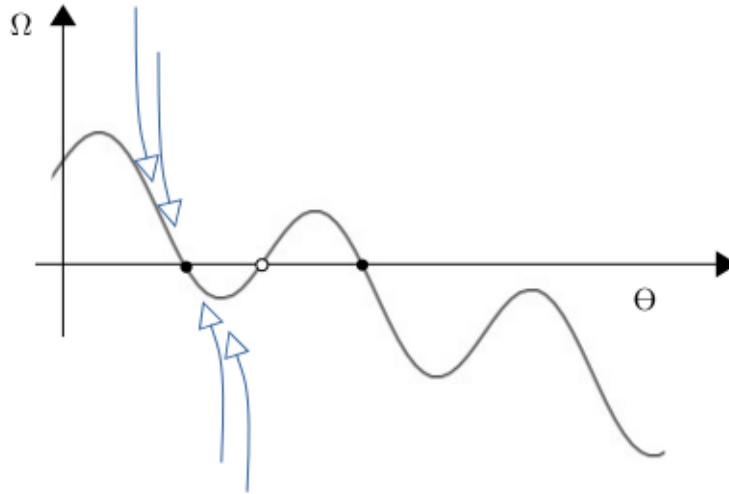


Figura 16. Colapso al estado estacionario en nuestro péndulo, bajo la condición $m^2 \ll \frac{b^2}{gL^3}$. Las condiciones iniciales mostradas dan lugar a trayectorias que primero, colapsan rápidamente a la vecindad de una variedad unidimensional. Una vez en ella, evolucionan lentamente, siempre muy cerca de la variedad, aproximándose al estado estacionario.

Este ejemplo ilustra con mucha claridad el mecanismo dinámico que está subyacente en numerosos modelos fenomenológicos, permitiendo representar exitosamente un complejo sistema físico por medio de un conjunto reducido de ecuaciones diferenciales. Ese mecanismo consiste en aprovechar la enorme disparidad de escalas temporales, para eliminar algunas de las variables del problema (las variables “rápidas”). El problema se simplifica entonces ya que sólo intervienen en su descripción las variables “lentas”.

Referencias comentadas.

Ejemplos introductorios para la bifurcación nodo-repulsor fueron tomados de [Strogatz 2014]. El campo vector sigmoideo que empleamos para presentar la bifurcación “cúspide” fue introducido por Wilson [Wilson 1999], y la dinámica a la

que da lugar es analizada en profundidad en [Hoppensteadt & Izhikevich 2012]. El problema con el que introducimos la reducción dimensional está adaptado de [Strogatz 2014].

DRAFT