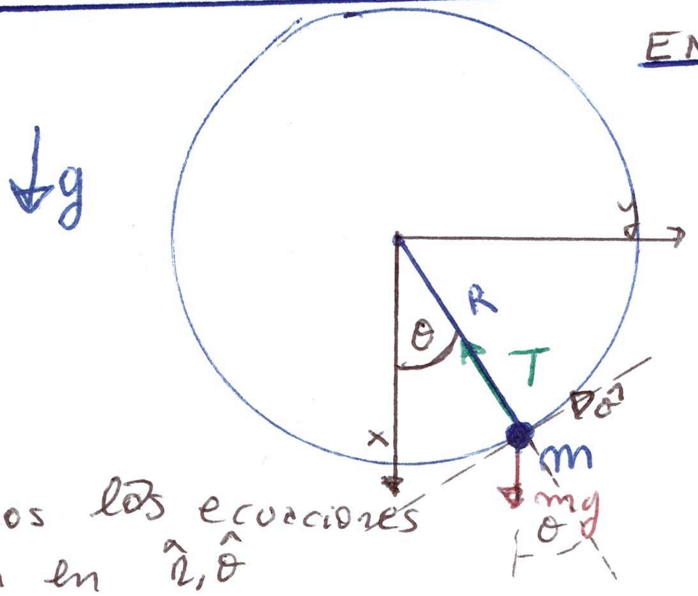
MASA ATADA A UN HILO GIRANDO EN UN PLANO VERTICAL



$\bar{T} = -T\hat{r}$ TENSIÓN

$m\bar{g} = -mg\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta} + mg\cos\theta\,\hat{r}$

Peso

Escribimos las ecuaciones de Newton en $\hat{r},\hat{\theta}$

$$\hat{r})\quad -T + mg\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\hat{\theta})\quad -mg\,\text{sen}\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

Mientras la soga se mantenga tensa $r =$ CONSTANTE $= R$ por lo tanto $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Las ecuaciones quedan

Vínculo $$-T + mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2 \qquad (\hat{r})$$

Movimiento $$-\cancel{m}g\,\text{sen}\theta = \cancel{m}R\ddot{\theta} \qquad (\hat{\theta})$$

La ec. de movimiento es $-g\,\text{sen}\theta = R\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\theta \;; \text{ para resolverla}$$

utilizo $$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Así $$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\theta\,d\theta$$

Supongamos que el movimiento empezó en $\theta = 0$ y

$$\int_{\dot\theta_0(\theta=0)=\omega_0}^{\dot\theta} \dot\theta\, d\dot\theta = \int_{\theta=0}^{\theta} -\frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$\rightarrow \left.\frac{\dot\theta^2}{2}\right|_{\omega_0}^{\dot\theta} = \left.\frac{g}{R}\cos\theta\right|_0^{\theta}$$

[Recordan $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\text{sen}\,\theta$

$$\frac{[\dot\theta^2 - \omega_0^2]}{2} = \frac{g}{R}(\cos\theta - 1) \qquad (\cos 0 = 1)$$

$$\Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2$$

Acá podríamos utilizar la identidad trigonométrica $\cos\theta - 1 = -2\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, pero se los dejo de tarea a Uds.

Como $\frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)$ es negativa (o cero), puede pasar que sumada a ω_0^2 de positivo ó negativo

pero $\dot\theta^2$ no puede ser negativo $\underset{\text{puede}}{\Rightarrow} \exists\ \theta_R \ /\ \dot\theta\Big|_{\theta_R} = 0$

$$\text{Si } \dot\theta^2 = 0 \Rightarrow \frac{2g}{R}(\cos\theta_R - 1) + \omega_0^2 = 0$$

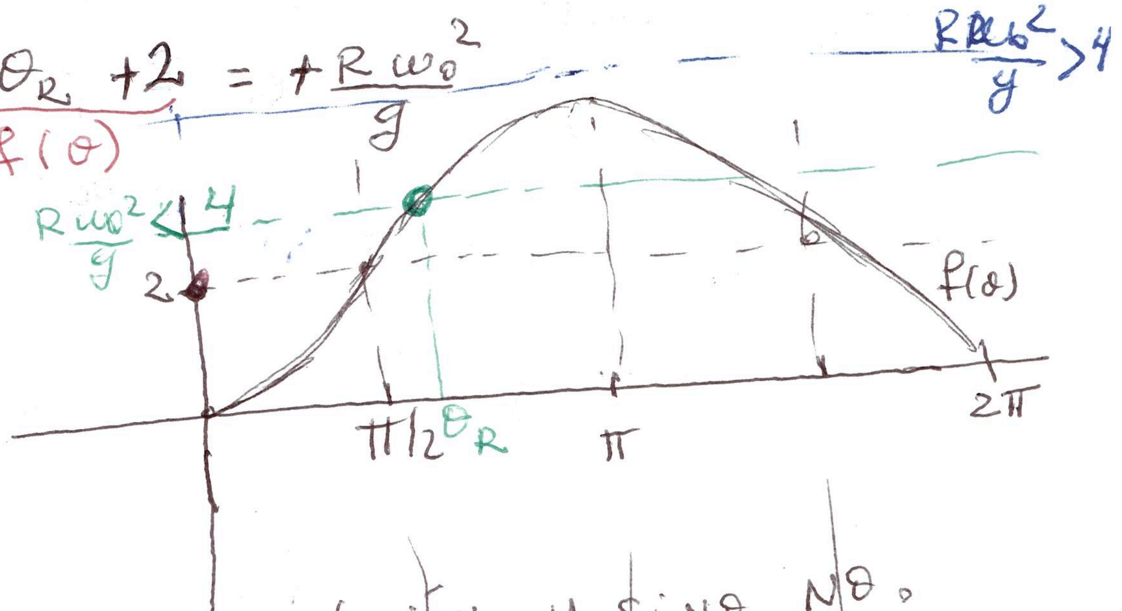
$$\Rightarrow \cos\theta_R = -\frac{R\omega_0^2}{2g} + 1$$

Como $|\cos\theta| \leq 1$, la ecuación para θ_R puede no tener solución. Es decir, puede que no ∃xiste un ángulo para el cual $\dot\theta = 0$ y en ese caso parecería que la masa sigue dando vueltas en su movimiento circular.

Podemos verlo gráficamente, y para esto por conveniencia con lo que haré después lo re-escribo

(NB: vale también acotar $|\cos\theta_R| < 1$, y sale lo mismo).

$$\underbrace{-2\cos\theta_R + 2}_{f(\theta)} = +\frac{R\omega_0^2}{g}$$



Si $\frac{R\omega_0^2}{g} < 4$ hay solución, y sino NO.

Ahora, que pasa con la T, como varía con θ cuando se mueve la masa.

De la Ec. de Newton del vínculo, sabemos que

$$-T + mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad T = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$$

Si reemplazo $\dot{\theta}^2$ con lo que obtuvimos integrando la ec. de movimiento.

$$T = mg\cos\theta + mR\left[\omega_0^2 + \frac{2g}{R}(\cos\theta \ldots\right.$$

juntando los términos con cos

$$\boxed{T = 3mg\cos\theta + mR\omega_0^2 - 2mg}$$

El resultado matemático muestra que la tensión es una suma de términos que puede dar < 0. Pero un ... tensión en $+\hat{n}$, solo $-\hat{n}$

con lo cual, según nuestra definición de $\vec{T} = -T\hat{n}$ debe ser $\underline{\underline{T>0}}$

Entonces

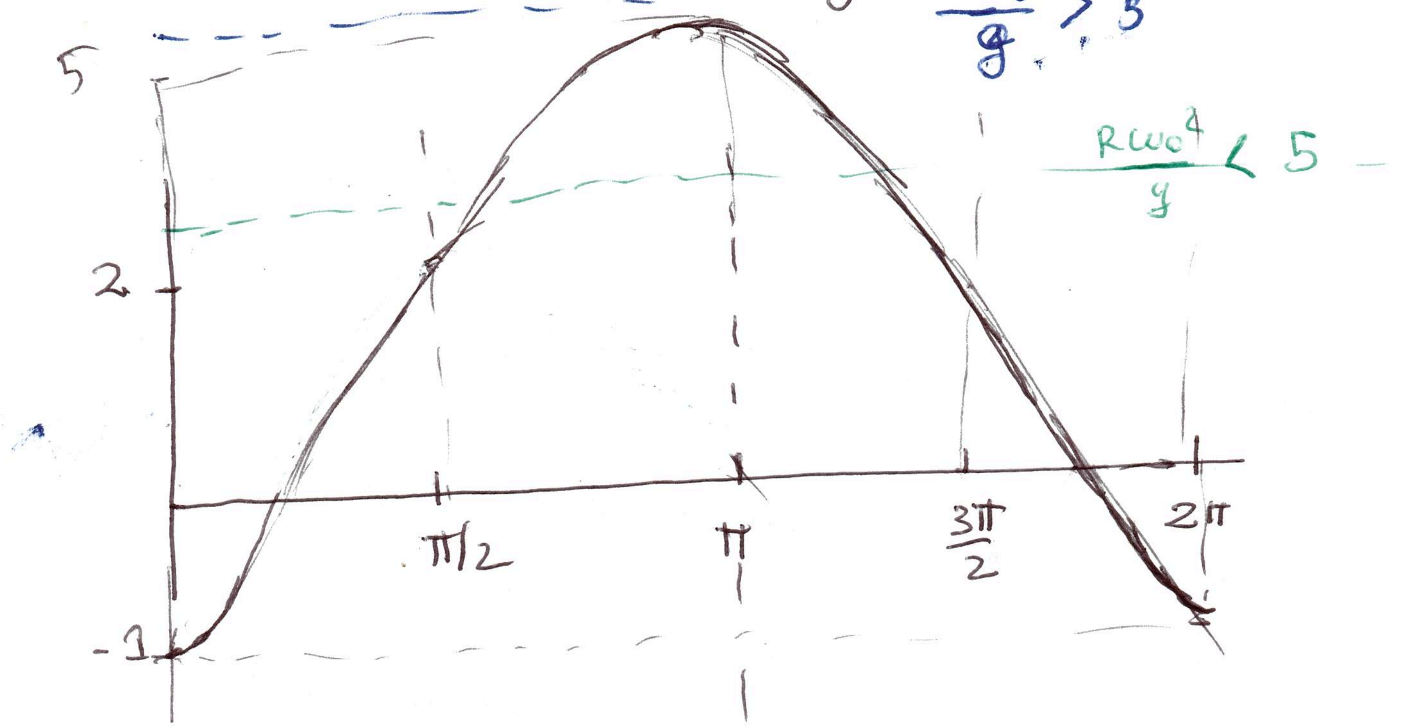
$$T = 3mg\cos\theta + mR\omega_0^2 - 2mg$$

Veamos si existe un θ_T / $T=0$

$$0 = 3\cancel{m}g\cos\theta_T + \cancel{m}R\omega_0^2 - 2\cancel{m}g$$

$$2 - 3\cos\theta_T = \frac{R\omega_0^2}{g}$$

Lo usamos para la gráfica



Del gráfico vemos que si $\frac{R\omega_0^2}{g} < 5$ $\exists\ \theta_T$.

La misma conclusión la podemos sacar acotando directamente

$$2 - 3\cos\theta_T = \frac{R\omega_0^2}{g} \Rightarrow$$

$$\cos\theta_T = \frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g}$$

$\Rightarrow |\cos\theta_T| \le 1$ para que exista

$\frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g} < 1 \Rightarrow$

SIEMPRE

$\frac{R\omega_0^2}{3g} > \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{R\omega_0^2}{g} > -\frac{1}{2} > 0}$

$-\frac{2}{3} + \frac{R\omega_0^2}{3g} < 1 \Rightarrow \frac{R\omega_0^2}{3g} < \overbrace{1 + \frac{2}{3}}^{5/3}$

$\boxed{\frac{R\omega_0^2}{g} < 5}$

Diciendo todo junto

Si $\frac{R\omega_0^2}{g} < 4 \quad \exists\, \theta_R \;/\; \dot{\theta} = 0$ en ese ángulo

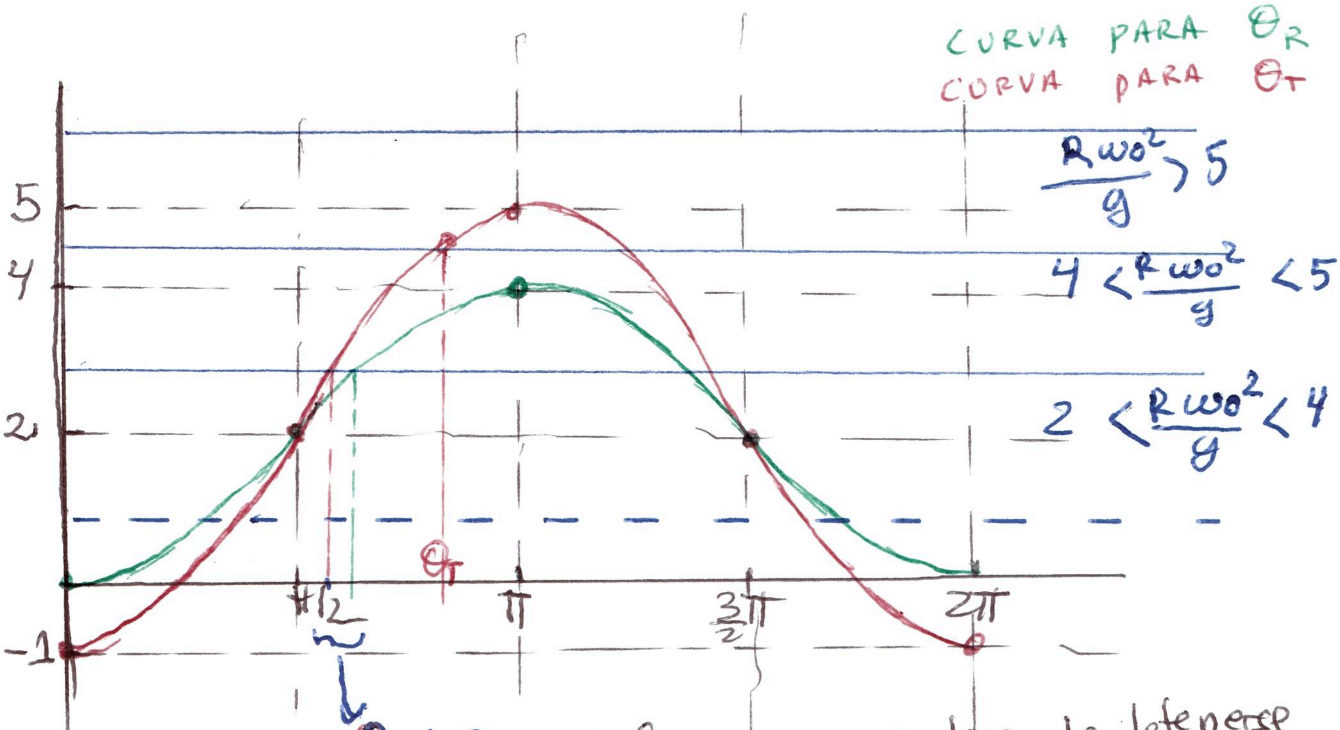
PTO de Retorno

Si $\frac{R\omega_0^2}{g} < 5 \quad \exists\, \theta_T \;/\; T = 0$

Pto donde se arruga la soga. (La fza NO puede cambiar sentido, la soga tira pero no empuja)

La pregunta que nos falta por responder es cual es mayor θ_R o θ_T. Porque si fuera $\theta_T < \theta_R$, la soga se arruga antes de llegar a θ_R y por lo tanto deja de valer la condición de vínculo $r = R$.

Veamoslo gráficamente, juntando las 2 curvas de antes



$\theta_T < \theta_R \Rightarrow$ Se arruga ANTES de detenerse.

FINALMENTE PODEMOS CONCLUIR QUE

Si $\frac{R\omega_0^2}{g} < 2$ existe un pto de retorno θ_R que se alcanza con $T > 0$.

$2 < \frac{R\omega_0^2}{g} < 4$ la soga se arruga antes de llegar a θ_R, o sea, antes de alcanzar $\dot{\theta} = 0$.

$4 < \frac{R\omega_0^2}{g} < 5$ la soga se arruga en θ_T (y no existe θ_R)

$\frac{R\omega_0^2}{g} > 5$ No existen ni θ_T ni θ_R. Hace un movimiento circular no uniforme.

NOTAR QUE ~~SE~~ ARRUGA SOLAMENTE en casos de $\pi/2 < \theta < \pi$, es decir cuando la fuerza peso ~~que~~ tendría aporta radialmente en el mismo sentido la tensión.