Oscilaciones Forzadas - Resonancia

Supongamos un resorte de constante elastica k uni
a una masa m y en presencia de fricción. Si supone
que sobre la masa actua una Fuerza adicional
$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, sabemos que la elongación del
resorte cumple con la ecuacion diferencial.

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \text{donde} \qquad (1)$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $b = \frac{C}{2m}$ siendo C la constante en la fuerza viscosa $\bar{F}_v = -C\,\bar{v}$.

$$y \quad f(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m} = f_0 \cos(\omega t)$$

Las soluciones de la ec. (1) se pueden escribir
como $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$, donde

$x_H(t)$ = Solución general de la ec. Homogénea

$x_p(t)$ = Solución PARTICULAR.

De la resolución del problema del resorte con
friccion sabemos que $x_H(t)$ es tal que tiende
... luego de un tiempo (que depende de b, ...

De esta manera nos enfocaremos en encontrar $x_p(t)$ (2)

y pensaremos el problema luego de que haya pasado $x_H(t)$ (después de ese transitorio)

PARA resolver (1) vamos a proponer una forma de la solución, una combinación lineal de la forma:

$$x_H(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

Así, si encontramos los valores de A y B que hacen que la ec. diferencial (1) se satisfaga, ya está.

Ahora.

$$x_p = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\dot{x}_p = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_p = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

osea.

$$\overbrace{\left(-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)\right)}^{\ddot{x}_p} + 2b\overbrace{\left(-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right)}^{\dot{x}_p}$$
$$+ \omega_0^2\overbrace{\left(A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)\right)}^{x_p} = f_0\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \left(-A\omega^2 + 2bB\omega + A\omega_0^2\right)\cos(\omega t) +$$
$$\left(-B\omega^2 - 2bA\omega + B\omega_0^2\right)\mathrm{sen}(\omega t) = f_0\cos(\omega t)$$

Como busco una solución que valga en todo t, debe ser.

$$\left(-A\omega^2 + 2bB\omega + A\omega_0^2\right) = f_0$$
$$\left(-B\omega^2 - 2bA\omega + B\omega_0^2\right) = 0$$

Despejo A de la segunda

$$A = \frac{B}{2b\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)$$

ahora reemplazo este resultado en la otra.

$$-\frac{B(\omega_0^2-\omega^2)}{2b\omega}\cdot\omega^2 + 2bB\omega +$$

$$+\frac{B}{2b\omega}(\omega_0^2-\omega^2)\,\omega_0^2 = f_0 \Rightarrow$$

$$B\left[-\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{2b\omega}\omega^2 + 2b\omega + \frac{\omega_0^2}{2b\omega}(\omega_0^2-\omega^2)\right] = f_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$B\left[\frac{-(\omega_0^2-\omega^2)\omega^2 + (2b\omega)^2 + \omega_0^2(\omega_0^2-\omega^2)}{2b\omega}\right] = f_0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{f_0\,2b\omega}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]}}$$

y volviendo a reemplazar arriba en la expresion de A obtengo

$$A = f_0\frac{\cancel{2b\omega}(\omega_0^2-\omega^2)}{\cancel{2b\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\right]}$$

$$\boxed{A = \frac{f_0(\omega_0^2-\omega^2)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\right]}}$$

Entonces ya tenemos A y B

como funciones de ω (y ω_0, b)

$$x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Como sabemos la suma de un seno y un coseno de la misma frecuencia se puede escribir directamente

$$x_p(t) = \tilde{A}\cos(\omega t - \tilde{\varphi})$$

NB: Elegimos una fase $-\tilde{\varphi}$ por conveniencia en las cuentas que seguirán.

PARA ENCONTRAR $\tilde{A}$ y $\tilde{\varphi}$

escribimos el $\cos(\omega t - \tilde{\varphi}) = \cos(\tilde{\varphi})\cos\omega t + \mathrm{sen}\tilde{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\omega t$

$$\Rightarrow \tilde{A}\cos\tilde{\varphi}\cos(\omega t) + \tilde{A}\,\mathrm{sen}\tilde{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\omega t = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tilde{A}\cos\tilde{\varphi} &= A \\ \tilde{A}\,\mathrm{sen}\tilde{\varphi} &= B \end{aligned} \Rightarrow \tilde{A}^2\cos^2\tilde{\varphi} + \tilde{A}^2\,\mathrm{sen}^2\tilde{\varphi} = A^2+B^2$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^2 = A^2+B^2$$

$$\tilde{A} = \sqrt{A^2+B^2}$$

Haciendo el cociente,

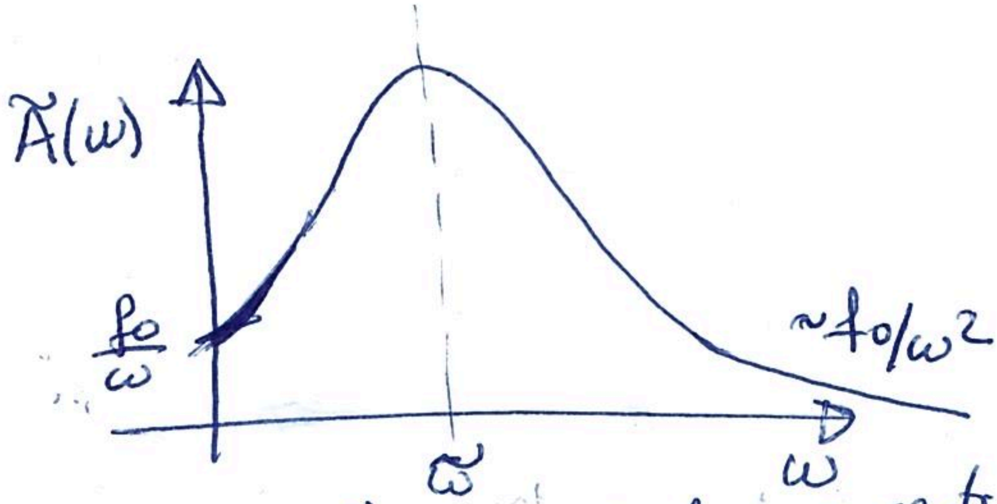
$$\tan\tilde{\varphi} = \frac{B}{A}$$

$$\boxed{\tan\tilde{\varphi} = \frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

$$\boxed{\tilde{A} = \frac{f_0}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}}$$

Como vemos, a un valor determinado de f_0, si variamos ω (la frecuencia del forzado), obtenemos amplitudes distintas.

⑤



El maximo de $\tilde{A}(\omega)$ lo podemos encontrar derivando

$$\tilde{A} = \frac{f_0}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{d\tilde{A}}{d\omega} = f_0\left(-\frac{1}{2}\right)\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{-3/2} \cdot$$

$$\cdot \left[2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega) + 2(2b)^2\omega\right]$$

todo lo subrayado NUNCA es cero (suma de cuadrados)

Asique para encontrar la ubicacion $\tilde{\omega}$ del máximo el $[\,]$ debe anularse

$$2(\omega_0^2-\tilde{\omega}^2)(-2\tilde{\omega}) + 2(2b)^2\tilde{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow 2\tilde{\omega}\left[2(\tilde{\omega}^2-\omega_0^2) + (2b)^2\right] = 0$$

$\Rightarrow$ si $\tilde{\omega} \neq 0$, debe cero

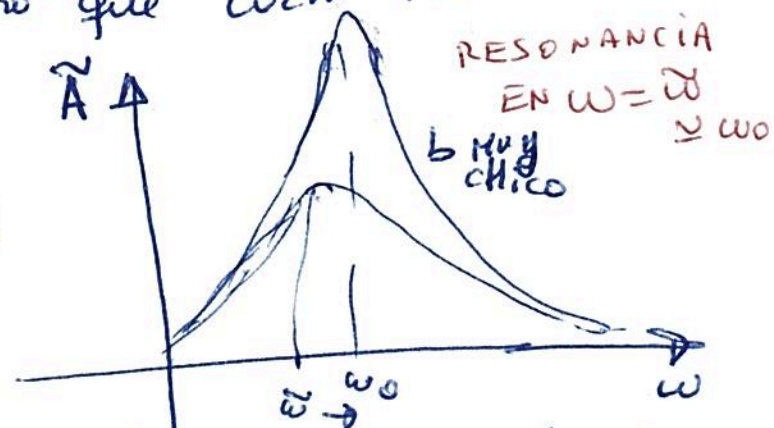
$$2(\tilde{\omega}^2-\omega_0^2) + (2b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 - 2b^2}$$

NB: Todavia, deberian asegurarse que $\tilde{\omega}$ es un maximo justo en ese VALOR $\omega = \tilde{\omega}$, (reemplazando) (6)

$\tilde{A}$ vale $= \dfrac{f_0}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$

con lo cual vemos que cuanto menor sea b más grande es $\tilde{A}$



4) sintonizar el valor de ω al valor $\tilde{\omega}$ logramos la mayor amplitud del movimiento. Además, esa amplitud se hace cada vez más grande a medida que disminuimos b.

Notar también que el aumento de esta amplitud no tiene que ver con un cambio en la amplitud de F(t), sino con $\underline{\omega}$.

Finalmente, que podemos decir de la velocidad

$\dot{x}_p = -\tilde{A}\omega \,\mathrm{sen}(\omega t - \tilde{\varphi})$, vemos que hay un desfasaje entre la oscilación de la velocidad y la de la fza. $(\cos(\omega t - \tilde{\varphi}))$, eso es así excepto cuando $\tilde{\varphi} = \pi/2$, en ese caso sabemos que $\mathrm{sen}(\omega t - \pi/2) = -\cos(\omega t)$

$\Rightarrow \dot{x}_p = \omega\tilde{A}\cos(\omega t)$ en FASE con $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

ahora, CUANDO VALE $\tilde{\varphi} = \pi/2$.

De la expresión $\tan \tilde{\varphi} = \dfrac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ concluimos

que como $\tan(\pi/2) \to \infty$ debe ser $\boxed{\omega = \omega_0}$

Esto coincide con $\vec{\omega}$ de la resonancia de la amplitud de oscilación x_p cuando b es pequeño.