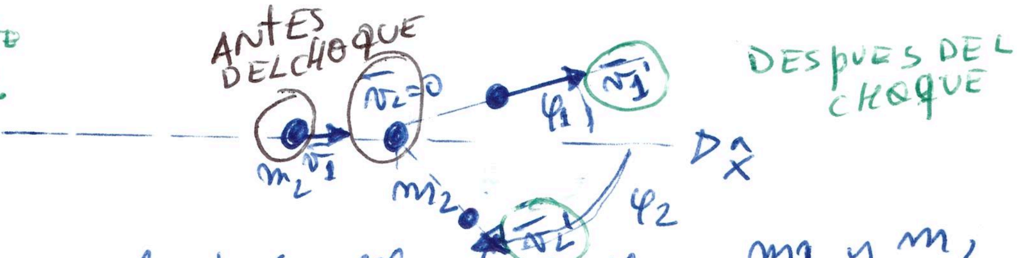
Choque en 2D

Consi~~deremos~~ una colisión de una masa m_1 con velocidad $\vec{v}_1$ que choca ~~otra~~ masa m_2 en reposo ($\vec{v}_2=0$). El sistema de referencia donde lo estamos describiendo es lo que llamamos Sistema de Laboratorio. Estamos interesados en saber que condiciones me impone la CONSERVACIÓN del MOMENTO Lineal total (m_1+m_2) y de la energía cinética ~~total~~. ; es decir CONSIDERAMOS UN ~~Cho~~que ELÁSTICO.

NB: Acá lo importante es la dirección DE $\vec{V}$.



Supongamos que después del choque, m_1 y m_2 tienen $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$.

$$\vec{v}_1' = v_1' \left(\cos\varphi_1 \hat{x} + \operatorname{sen}\varphi_1 \hat{y}\right)$$
$$\vec{v}_2' = v_2' \left(\cos\varphi_2 \hat{x} + \operatorname{sen}\varphi_2 \hat{y}\right)$$

NB: $\varphi_2 < 0$ en el dibujo

TRATAREMOS DE ENCONTRAR $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ sabiendo $\vec{v}_1$, $v_2=0$ y las masas.

PARA SIMPLIFICAR LAS CUENTAS, primero VAMOS A RESOLVERLO EN en sistema de Referencia del centro de MASA, YA que sabemos que al NO HABER F externas $\vec{V}_{CM}$ medida en el laboratorio es constante. Así, definimos las velocidades en ese sistema de referencia como:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \qquad ; \qquad \vec{u}_1' = \vec{v}_1' - \vec{v}_{CM}$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \qquad \quad \vec{u}_2' = \vec{v}_2' - \vec{v}_{CM}$$

← NO CAMBIA!

NO CAMBIA!

ahora $\bar V_{CM} = \dfrac{m_1 \bar v_1 + m_2 \cancel{\bar v_2}^{=0}}{m_1+m_2}$ (o con los $\bar v_1', \bar v_2'$ pero no los conozco)

$$\bar V_{CM} = \frac{m_1 \bar v_1}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow \bar u_1 = \bar v_1 - \frac{m_1 \bar V_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\bar V_1$$

$$\bar u_2 = \cancel{\bar V_2}^{=0} - \frac{m_1 \bar V_1}{m_1+m_2} = -\frac{m_1 \bar V_1}{m_1+m_2} = -\frac{m_1}{m_2}\bar u_1$$

NB: $m_1 \bar u_1 + m_2 \bar u_2 = 0$ pues es $(m_1+m_2) \times$ la velocidad del CM medida desde el CM mismo!. Además representa LA CONSERVACIÓN DEL impulso total en ESE sistema.

Escribamos ahora la CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA en el sistema C.M.

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$$

En término de los datos, $u_2 = u_1 \dfrac{m_1}{m_2}$, $u_2' = u_1' \dfrac{m_1}{m_2}$ (en módulos!)

$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(u_1 \frac{m_1}{m_2}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(u_1' \frac{m_1}{m_2}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2} u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2} u_1'^2$$

(ACÁ YA VEMOS $u_1' = u_1$ pero escribamos +)

$$\frac{1}{2} u_1^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) = \frac{1}{2} u_1'^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)$$

$$\boxed{u_1' = u_1}$$

Podemos HACER LA MISMA CUENTA escribiendo PARA u_2 y u_2'.

Además notar que para una colisión distinta en el sistema Lab, llegaríamos a la misma condición!

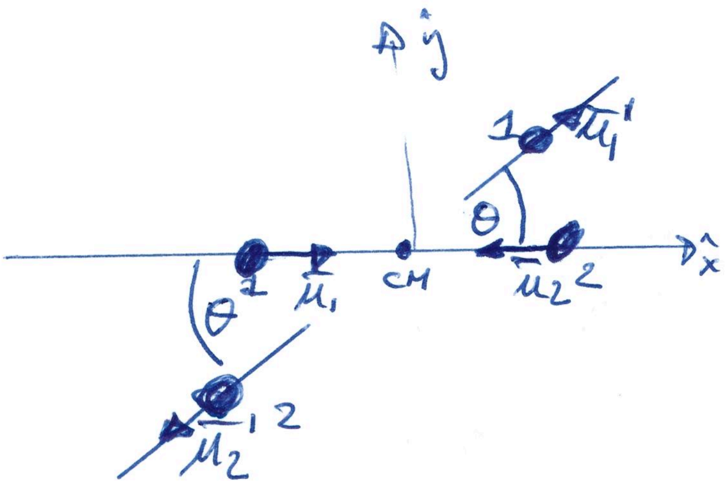
En resumen, la conservación del impulso lineal y de la energía cinética en el choque elástico nos dice (3)

que
$$u_1' = u_1$$
$$u_2' = u_2$$
$$\bar u_1 = -\frac{m_2 \bar u_2}{m_1}$$

en gral. y si además, como en el caso que estamos resolviendo, $v_2 = 0$,

$$\boxed{\begin{aligned}\bar u_1 &= \frac{m_2 \bar V_1}{m_1+m_2} \\ \bar u_2 &= -\frac{m_1 \bar V_1}{m_1+m_2}\end{aligned}}$$

pero no nos dice nada del ángulo de la velocidad!



θ no está fijado por la conservación de $\bar P$ y E

NB: Dirección de velocidades

Si ahora volvemos a describir en el sistema laboratorio.

$$\bar v_1' = \bar u_1' + \bar v_{CM} = u_1'(\cos\theta\,\hat x + \text{sen}\,\theta\,\hat y) + \overbrace{\frac{m_1 v_1 \hat x}{m_1+m_2}}^{\bar v_{CM}}$$
$$\bar v_2' = \bar u_2' + \bar v_{CM} = -u_2'(\cos\theta\,\hat x + \text{sen}\,\theta\,\hat y) + \frac{m_1 v_1 \hat x}{m_1+m_2}$$

Si analizamos las componentes $\hat x$ e $\hat y$ de las velocidades.

$$v_{1x}' = v_1' \cos\varphi_1 = \overbrace{u_1'}^{m_2 v_1/(m_1+m_2)} \cos\theta + \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$$
$$= \frac{m_2 V_1}{m_1+m_2}\cos\theta + \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$$
$$= \frac{V_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\cos\theta + m_1/m_2\right)$$

$$v_{1y}' = v_1' \,\text{sen}\,\varphi_1 = \frac{m_2 v_1}{m_1+m_2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = \boxed{\tan\varphi_1 = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}}$$

Para v_2'

$$v'_{2x} = v'_2 \cos\varphi_2$$

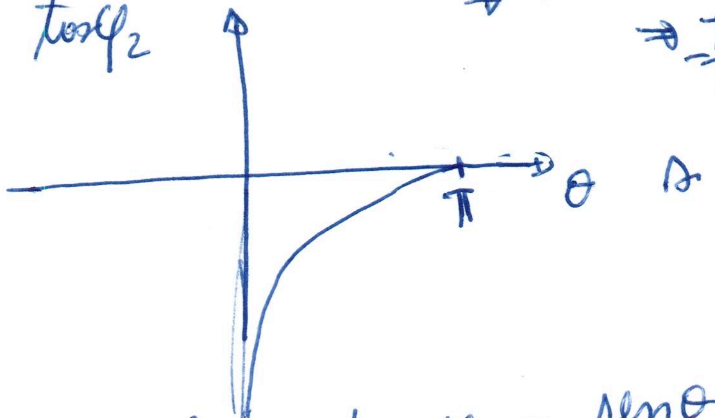
$$= -u'_2 \cos\theta + \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$$

$$= -\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}\cos\theta + \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$$

$$v'_{2y} = -\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}\operatorname{sen}\theta = v'_2 \operatorname{sen}\varphi_2$$

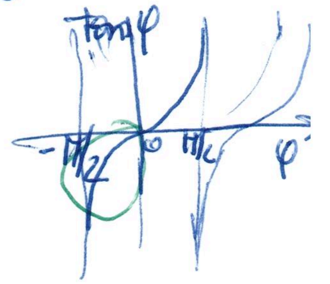
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta + 1}$$

Veamos finalmente que VALORES puede tomar φ_2 y φ_1 sabiendo que θ puede tomar $0 \leq \theta \leq \pi$



$\Rightarrow$ toma cualquier VALOR NEGATIVO

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq 0$



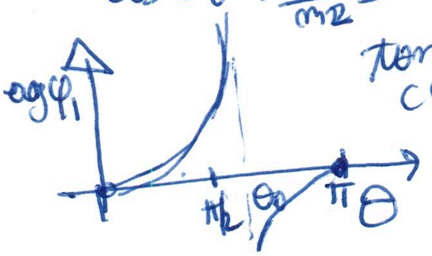
y PARA φ_1 $\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$; depende de $\frac{m_1}{m_2}$

$m_1 < m_2$

$\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}$ puede ser 0 $(|\cos\theta| < 1)$

Supongamos θ_0 /

$\cos\theta_0 + \frac{m_1}{m_2} = 0$



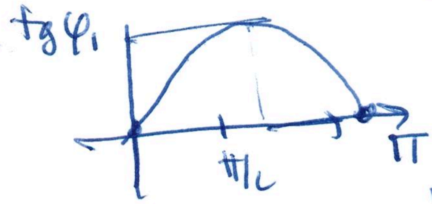
toma cualquier VALOR

$\Rightarrow 0 \leq \varphi_1 \leq \pi$

$\boxed{m_1 > m_2}$

$\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}$ no puede ser cero,

$\cos\theta + \frac{m_1}{m_2} > 0$



$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 > 0$ siempre y toma un valor MAXIMO $\Rightarrow$

φ_1 tiene un máximo $< \pi/2$.

m_1 no puede rebotar para atrás