Un cilindro homogéneo de masa M_c, radio R y momento de inercia $I = M_c R^2/2$ rueda sin deslizar sobre una barra rectangular de masa M_b y longitud L, sobre la cual está aplicada una fuerza externa constante $\bar{F}_o$ como muestra la Figura. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el cilindro y la barra son, respectivamente, μ_e y μ_d, y no existe rozamiento entre la barra y el piso. En el instante inicial, el sistema se encuentra en reposo, y el centro de masa del cilindro está ubicado sobre el extremo derecho de la barra.

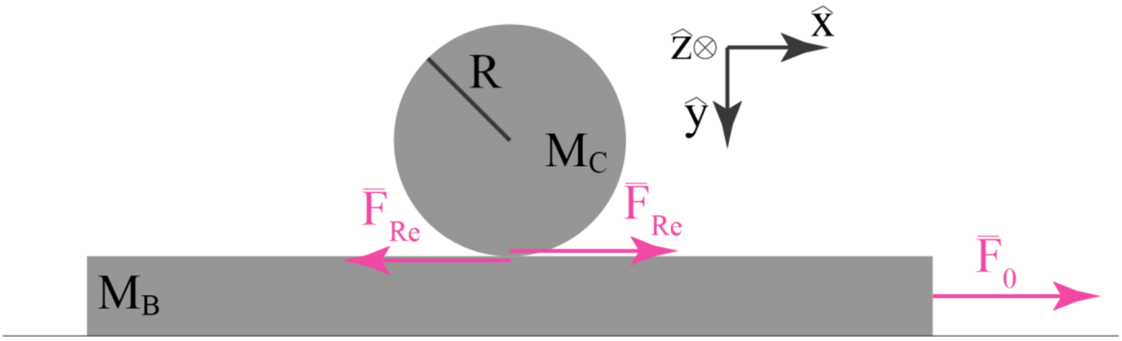
a) Dibuje todas las fuerzas que actúan en el sistema, indicando dirección, sentido y el punto donde están aplicadas.

b) Escriba las ecuaciones dinámicas y de vínculo para el cilindro y la barra.

c) Calcule la aceleración del centro de masa del cilindro y de la barra.

d) Diga cuánto tiempo tarda el cilindro en llegar al otro extremo de la barra.

a) Las fuerzas relevantes para el movimiento son la F_0 que se le hace a la barra y las fuerzas de rozamiento (par de acción y reacción) entre la barra y el cilindro, iguales en módulo y opuestas en sentido. El enunciado indica que el cilindro rueda sin deslizar, entonces no hay deslizamiento entre las superficies en contacto, con lo cual el rozamiento es estático. Recuerden que **no** vale que $F_{Re} = \mu_e N$, esta ecuación era válida para el rozamiento dinámico, siempre constante. El estático es una fuerza de vínculo que solo podremos despejar de las ecuaciones de Newton y vínculo. Vale lo necesario para que se cumpla la condición de rodadura. No nos preguntan por cuál sería el rozamiento máximo, notemos que si F_0 fuera muy muy grande, podría suceder que el cilindro deslizara sobre la barra, en ese caso sí romperíamos la rodadura porque superaríamos la $F_{Re_{MAX}} = \mu_e N$.



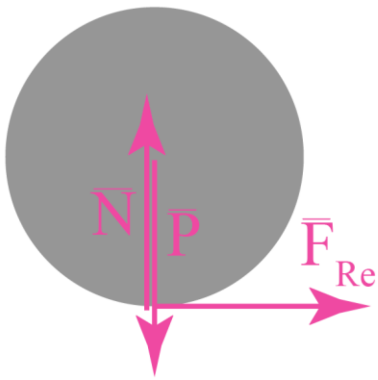
b) Newton para el cilindro

$M_C \ddot{x}_C = F_{Re}$ (1)

Newton para la barra

$M_B \ddot{x}_B = F_0 - F_{Re}$ (2)

Rotación del cilindro. Veamos las Fuerzas sobre el cilindro para calcular los torques. Tendremos el torque del peso, la normal y el rozamiento, pero el peso se aplica en el centro de masa (el O o centro de momentos es el CM desde donde medimos los torques), así que su torque dará 0. La normal es una fuerza central (apunta hacia el centro de masa), así que el producto vectorial anula también ese torque. Esto es general, no es posible nunca hacer girar un objeto pegándole justo en dirección del centro de masa.

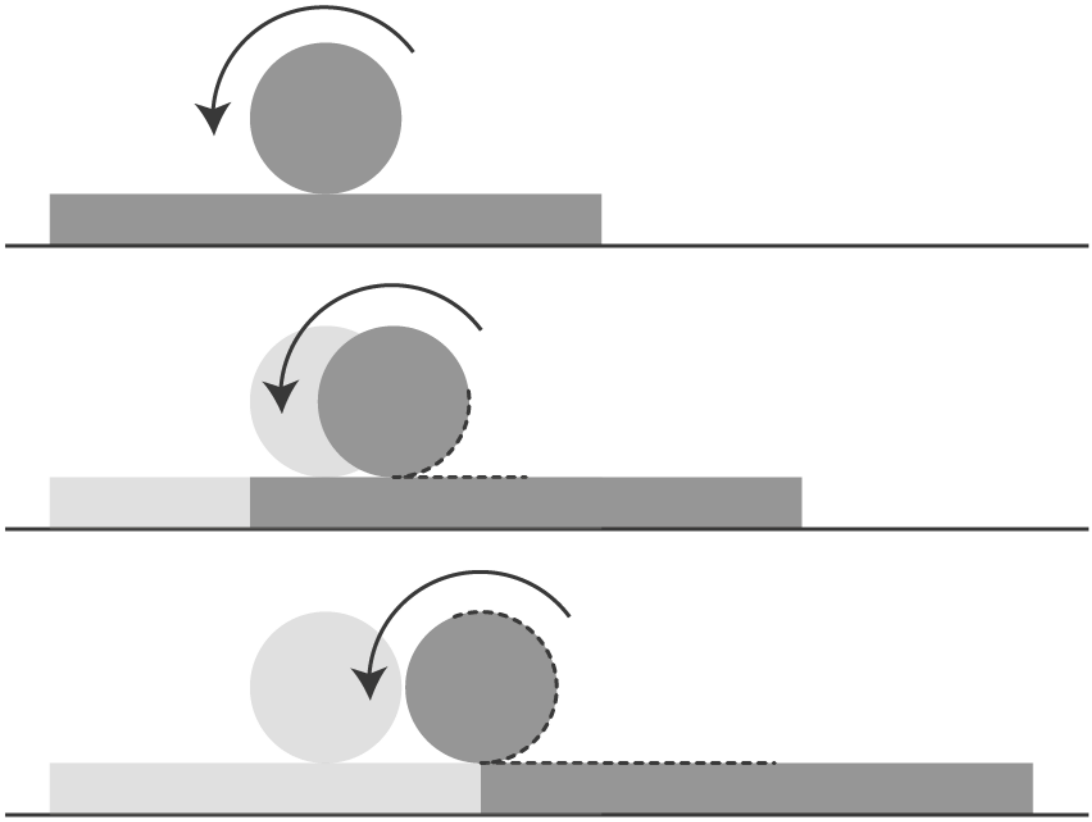


$$\frac{1}{2}M_C R^2 \dot{\bar{\Omega}}_B = 0 \times P\hat{y} + R\hat{y} \times N(-\hat{y}) + R\hat{y} \times F_{Re}(\hat{x})$$

$$\frac{1}{2}M_C R^2 \dot{\bar{\Omega}} = -RF_{Re}\hat{z}$$

$$\dot{\bar{\Omega}} = -\frac{2F_{Re}}{M_C R}\hat{z} \qquad (3)$$

Esto nos dice que la aceleración angular aumenta con F_{Re} y disminuye con M_C y R, como esperamos dado que tanto M_C como R contribuyen a la inercia del cilindro. Además, vemos que debe apuntar en $-\hat{z}$, lo que es coherente pensando que el cilindro irá más lento que la barra, dado que gira.

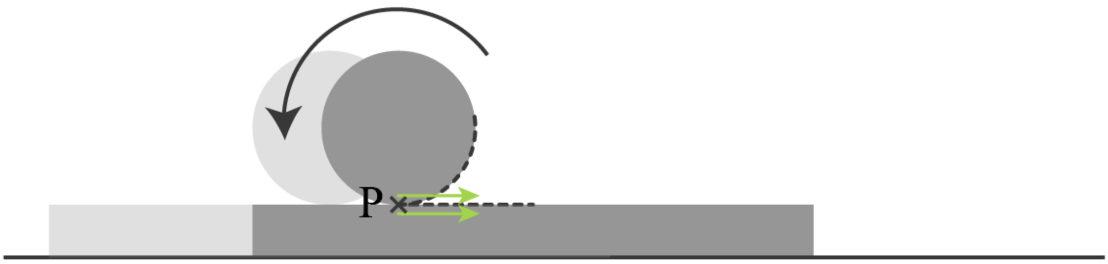


Nos falta el famoso vínculo cinemático del cuerpo rígido…

La ecuación general que relaciona las velocidades de dos puntos P y Q del cuerpo rígido.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_Q + \bar{\Omega} \times (\bar{r}_P - \bar{r}_Q)$$

En estos ejercicios, es conveniente elegir Q=CM dado que después podemos derivar el vínculo y nos queda en función de las aceleraciones, las que tenemos en las ecuaciones de Newton. El otro punto P lo elegimos siempre como el punto del cilindro en contacto con la barra. Así, después diremos que la velocidad del punto P del cilindro debe ser la misma que la de la barra.



$$\bar{v}_P = \bar{v}_{CM} + \bar{\Omega} \times (\bar{r}_P - \bar{r}_{CM})$$

$\bar{r}_P$ y $\bar{r}_Q$ los mediremos también respecto del CM. Así, nos queda:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{CM} + \bar{\Omega} \times (R\hat{y} - 0)$$

Donde la velocidad de P pedimos que sea la misma de la barra, estamos pidiendo que se cumpla la condición de rodadura que pide el enunciado.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{CM} + \bar{\Omega} \times R\hat{y}$$

El sistema arranca en reposo, y las aceleraciones de la barra y el CM del cilindro son positivas y apuntan en $\hat{x}$ (como indican las ecuaciones de Newton), de manera que las velocidades también apuntarán en esa dirección. La aceleración angular ya vimos que estaba en $-\hat{z}$.

$$\dot{x}_B\hat{x} = \dot{x}_C\hat{x} + \Omega(-\hat{z}) \times R\hat{y}$$

Notemos que estamos poniendo el signo de Ω **explícitamente**. De ahora en adelante, trabajaremos con el módulo de Ω, que siempre es **positivo**. Así, todo nos queda apuntando en $\hat{x}$, que lo podemos tachar.

$$\dot{x}_B\hat{x} = \dot{x}_C\hat{x} + \Omega R\hat{x}$$
$$\dot{x}_B = \dot{x}_C + \Omega R$$

Esta expresión nos dice que la velocidad de la barra es la suma de la velocidad de traslación del cilindro (la del CM) más ΩR. Notemos que si el cilindro rota en $-\hat{z}$, el punto P de abajo tendrá mayor velocidad que el punto de arriba, por eso debe ser una suma.

Y derivando llegamos a:

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_C + \dot{\Omega}R$$

Resumiendo, las ecuaciones nos quedan:

$M_C\ddot{x}_C = F_{Re}$ (1)

$M_B\ddot{x}_B = F_0 - F_{Re}$ (2)

$\dot{\bar{\Omega}} = -\frac{2F_{Re}}{M_C R}\hat{z}$ (3)

$\ddot{x}_B = \ddot{x}_C + \dot{\Omega}R$ (4)

Las incógnitas son las dos aceleraciones lineales, la aceleración angular y la fuerza de rozamiento. Tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

c) Para calcular las aceleraciones lineales del cilindro y la barra, reemplazemos $\dot{\Omega}$ en (4) por la expresión obtenida en (3). Acá es donde debemos reemplazar el módulo de $\dot{\Omega}$, dado que ya habíamos puesto su dirección y sentido antes. En el reemplazo debemos quitar el signo $-$ de (3). Acá es donde 💩 en la clase de hoy (disculpen!!!).

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_C + \frac{2F_{Re}}{M_C R}R = \ddot{x}_C + \frac{2F_{Re}}{M_C}$$

Ahora, ya usamos (4) y (3), usemos (2) para reemplazar $\ddot{x}_B$:

$$\frac{F_0 - F_{Re}}{M_B} = \ddot{x}_C + \frac{2F_{Re}}{M_C}$$

Y finalmente, usemos (1) para reemplazar F_{Re} en ambos lados:

$$\frac{F_0 - M_C\ddot{x}_C}{M_B} = \ddot{x}_C + \frac{2M_C\ddot{x}_C}{M_C}$$

$$\frac{F_0}{M_B} - \frac{M_C\ddot{x}_C}{M_B} = 3\ddot{x}_C$$

$$F_0 - M_C\ddot{x}_C = 3M_B\ddot{x}_C$$

$$F_0 = 3M_B\ddot{x}_C + M_C\ddot{x}_C$$

$$F_0 = (3M_B + M_C)\,\ddot{x}_C$$

$$\boxed{\ddot{x}_C = \frac{F_0}{3M_B + M_C}\,\frac{1/3}{1/3} = \frac{F_0/3}{M_B + \frac{M_C}{3}}}$$

Ahora sí! Calculemos entonces la aceleración de la barra usando (2)

$$M_B\ddot{x}_B = F_0 - F_{Re}$$

Reemplazamos la fuerza de rozamiento usando (1)

$$M_B\ddot{x}_B = F_0 - M_C\ddot{x}_C$$

Y ahora reemplazamos por el valor encontrado para $\ddot{x}_C$

$$M_B\ddot{x}_B = F_0 - M_C\frac{F_0}{3M_B + M_C} = F_0\left(1 - \frac{M_C}{3M_B + M_C}\right)$$

$$\ddot{x}_B = \frac{F_0}{M_B}\left(1 - \frac{M_C}{3M_B + M_C}\right)$$

$$\ddot{x}_B = \frac{F_0}{M_B}\left(\frac{3M_B + M_C}{3M_B + M_C} - \frac{M_C}{3M_B + M_C}\right)$$

$$\ddot{x}_B = \frac{F_0}{M_B}\left(\frac{3M_B + M_C}{3M_B + M_C} - \frac{M_C}{3M_B + M_C}\right)$$

$$\ddot{x}_B = \frac{F_0}{M_B}\left(\frac{3M_B}{3M_B + M_C}\right)$$

$$\boxed{\ddot{x}_B = \frac{3F_0}{3M_B + M_C}\frac{1/3}{1/3} = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}}}$$

Noten que $\ddot{x}_B$ es exactamente 3 veces más grande que $\ddot{x}_C$. $\ddot{x}_B$ sí o sí debe ser más grande dado que es la que recibe la fuerza, el cilindro, no puede alcanzar esa aceleración lineal dado que al tiempo que comienza a ir para adelante tmb comienza a rodar hacia atrás.

De yapa, calculemos la aceleración angular y la fuerza de rozamiento. De (1):

$$\frac{M_C F_0/3}{M_B + \frac{M_C}{3}} = F_{Re}$$

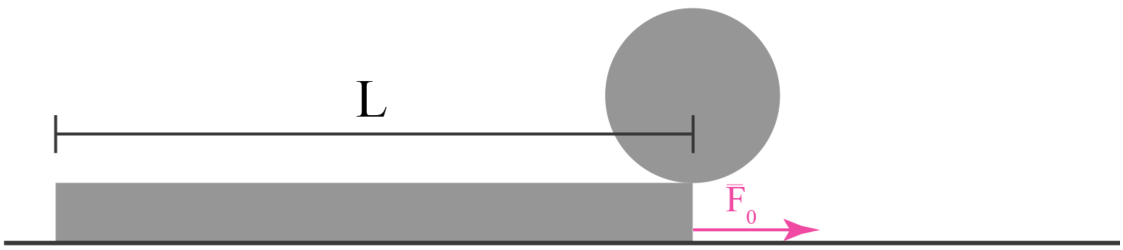
Noten que si la masa del cilindro fuera 0, el rozamiento también. No habría nada que frene a la barra de abajo, que tendría aceleración F_0/M_B.

Vamos por la aceleración angular, de (3):

$$\dot{\bar{\Omega}} = -\frac{2\frac{\frac{M_C F_0}{3}}{M_B + \frac{M_C}{3}}}{M_C R}\hat{z} = -\frac{2\frac{F_0}{3}}{\left(M_B + \frac{M_C}{3}\right)R}\hat{z}$$

Podemos ver que si $F_0 = 0$, el cilindro no tendría aceleración angular.

d) Nos dicen que al comienzo la situación es así:



Con el sistema en reposo. Tenemos ambas aceleraciones, queremos que la diferencia entre las posiciones sea justo L. Notemos que las aceleraciones son todas constantes. Es decir, tanto la barra como el cilindro se moverán con MRUVs. Escribamos la ecuación de posición para ambas, tomemos el CM del cilindro y el extremo derecho de la barra. Pongamos el 0 en el extremo derecho de la barra también, de manera que las posiciones iniciales tanto del cilindro como de la barra son 0. Integremos las aceleraciones respecto del tiempo.

$$\int_0^t \ddot{x}_B dt = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}}\int_0^t dt' = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}}\, t$$

$$\dot{x}_B - \cancel{\dot{x}_B(t=0)} = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}}\ t$$

La velocidad inicial de la barra, como la del cilindro, son 0 porque arrancan en reposo.

Integremos la velocidad respecto del tiempo.

$$\int_0^t \dot{x}_B dt = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}} \int_0^t t dt = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}} \frac{t^2}{2}$$

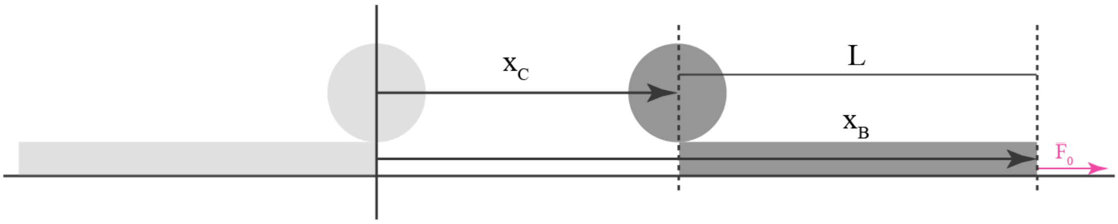
$$x_B(t) = \frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}} \frac{t^2}{2}$$

Para el cilindro, es completamente análogo, solo que integrando la aceleración del cilindro, también constante.

$$x_C(t) = \frac{F_0/3}{M_B + \frac{M_C}{3}} \frac{t^2}{2}$$

Notemos que, dado que su aceleración era 3 veces menor, el cilindro recorre 3 veces menos distancia horizontal.

Por otro lado, pensemos en la situación final, donde el cilindro llega al otro extremo de la barra. Algo así:



Notemos que, en ese instante, debe valer que:

$$x_B(t) - x_C(t) = L$$

Reemplazando las posiciones en función del tiempo

$$\frac{F_0}{M_B + \frac{M_C}{3}} \frac{t^2}{2} - \frac{F_0/3}{M_B + \frac{M_C}{3}} \frac{t^2}{2} = L$$

$$\left(\frac{F_0}{M_B+\frac{M_C}{3}}-\frac{1}{3}\frac{\frac{F_0}{3}}{M_B+\frac{M_C}{3}}\right)\frac{t^2}{2}=L$$

$$\frac{2}{3}\frac{F_0}{M_B+\frac{M_C}{3}}\frac{t^2}{2}=L$$

$$\frac{F_0}{M_B+\frac{M_C}{3}}\frac{t^2}{3}=L$$

Y despejamos el tiempo

$$\boxed{t=\sqrt{\frac{3L}{F_0}\left(M_B+\frac{M_C}{3}\right)}}$$

Notemos que es más grande a medida que la distancia L relativa entre el cilindro y la barra es mayor. También aumenta con la relación de las masas que da las aceleraciones. Si disminuímos la fuerza sobre la barra, el tiempo necesario es mayor.

e)
f)