Movimiento oscilatorio amortiguado

Movimiento oscilatorio amortiguado

Sea un cuerpo de masa m sometido a una fuerza elástica $(-kx)$ y una viscosa $(-\lambda v)$:

$$m\,a = -k\,x - \lambda\,v \quad \Longrightarrow \quad m\,a + \lambda\,v + k\,x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Definimos $\dfrac{\lambda}{m} \equiv 2\gamma$ y $\dfrac{k}{m} \equiv \omega^2$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2\,x = 0}$

La solución más general en una combinación lineal de dos soluciones independientes.

$$x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$$

Para hallar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ usamos la función exponencial $e^{\alpha t}$:

$$\frac{\mathrm{d}^n e^{\alpha t}}{\mathrm{d}t^n} = \alpha^n\,e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2 + 2\gamma\,\alpha + \omega^2)\,e^{\alpha t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Las constantes γ y ω determinan la importancia relativa de la fuerza viscosa y elástica. Según sus valores tenemos dos raíces reales, dos complejas, o una doble.

Cuatro casos para $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ según los valores relativos de γ y ω

$\boxed{\gamma = 0}$ *Sin amortiguación*: en este caso $\alpha = \pm i\,\omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = e^{+i\omega t} \\ x_2(t) = e^{-i\omega t} \end{array} \right. \implies x(t) = a\,e^{+i\omega t} + b\,e^{-i\omega t} \qquad \boldsymbol{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)}$$

$\boxed{\gamma < \omega}$ *Subamortiguado*: definimos $\gamma^2 - \omega^2 = -\omega_v^2$ o sea $\alpha = -\gamma \pm i\,\omega_v$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = e^{-\gamma t}\, e^{+i\omega_v t} \\ x_2(t) = e^{-\gamma t}\, e^{-i\omega_v t} \end{array} \right. \implies x(t) = e^{-\gamma t}\left(a\,e^{+i\omega_v t} + b\,e^{-i\omega_v t}\right) \qquad \boldsymbol{x(t) = e^{-\gamma t} A\,\mathrm{sen}(\omega_v t + \phi)}$$

$\boxed{\gamma = \omega}$ *Amortiguamiento crítico*: hay una raíz doble $\alpha = -\gamma$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = e^{-\gamma t} \\ x_2(t) = t\,e^{-\gamma t} \end{array} \right. \implies x(t) = a\,e^{-\gamma t} + b t\,e^{-\gamma t} \qquad \boldsymbol{x(t) = (a + b\,t)\,e^{-\gamma t}}$$

$\boxed{\gamma > \omega}$ *Sobreamortiguado*: definimos $\gamma^2 - \omega^2 = \omega_v^2$ o sea $\alpha = -\gamma \pm \omega_v$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = e^{(-\gamma + \omega_v)\,t} \\ x_2(t) = e^{(-\gamma - \omega_v)\,t} \end{array} \right. \implies \qquad \boldsymbol{x(t) = a\,e^{(-\gamma + \omega_v)t} + b\,e^{(-\gamma - \omega_v)t}}$$