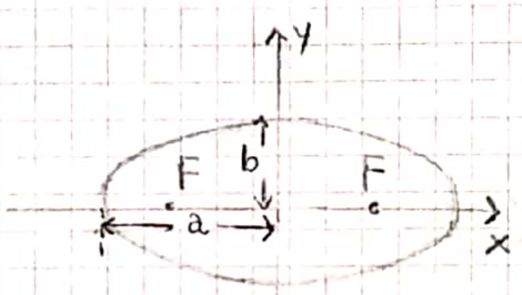
CONICAS EN CARTESIANAS

(1) Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$b=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

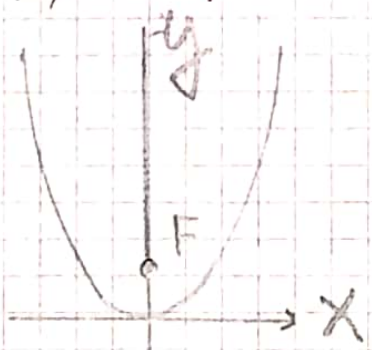
$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Si $a=b \Rightarrow$ círculo $\Rightarrow \varepsilon=0$. Si $\varepsilon \to 1$ es más alargado significa que $b \ll a$

Así como ε, p definen la elipse, también a y b.

(2) Parábola

$$y=a\,x^2$$

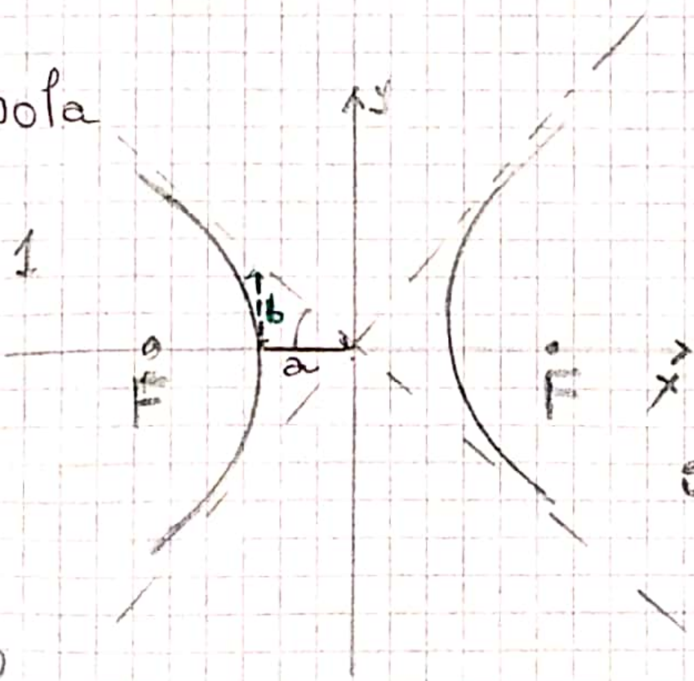


$$a=\frac{1}{2p}.$$

$\varepsilon=1.$

(3) Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$a=\frac{p}{\varepsilon^2-1}$$

$$b=\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$$

si $\varepsilon \uparrow$

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}\ \uparrow$$

$$f=\frac{p}{1+\varepsilon}$$

Física 1 - Gravitación: Trayectorias

Sea una fuerza central conservativa cuya energía potencial es $V(r)$. Se conservan L y E, que se pueden escribir en términos de v_r y v_t, la componente radial y tangencial de la velocidad.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{L}| &= |m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| = m\,rv\ \mathrm{sen}\,\alpha = m\,r\,v_t \\ E\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + V(r) = \tfrac{1}{2}mv_r^2 + \tfrac{1}{2}mv_t^2 + V(r) \end{aligned}$$

Remplazando v_t por L/mr y v_t por $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$:

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]}$$

Vemos que dado r, el momento angular L determina v_t y la energía E fija v_r. Para determinar $\boldsymbol{v}(t)$ sólo se necesita $r(t)$, resolviendo est ecuación diferencial.

Pero para hallar la trayectoria $r(\theta)$ se necesita $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{m^2r^4}{L^2}\ \frac{2}{m}\left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]$$

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^4\left[\frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2m}{L^2}\,V(r)\right]}$$

Esta ecuación se puede procesar de dos maneras. Una es proponer una cierta trayectoria $r(\theta)$, remplazar a la izquierda $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, y ver si hay alg'un $V(r)$ que le corresponda. Por ejemplo si se remplaza el $r(\theta)$ de una elipse se obtiene el $V(r)$ gravitatorio. Este es la metodología de Alonso-Finn.

Pero, como saber cuantos otros $r(\theta)$ son solución? Otra posibilidad es remplazar $V(r) = -GMm/r = -k/r$ y ver cuales son las trayectorias posibles. De hecho si ponemos $k < 0$ tendríamos el caso de rpulsión culombiana. Y podemo probar con el $V(r)$ que querramos.

Los dos métodos son entonces: (1) hay algún potencial que produzca esta trayectoria?; (2) que trayectorias produce este potencial?

Pongamos entonces $V(r) = -k/r$ con $k = GMm$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^4\left[\frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2}\,\frac{-k}{r} - \frac{1}{r^2}\right] \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{\frac{2mE}{L^2}\,r^4 + \frac{2mk}{L^2}\,r^3 - r^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2mE}{L^2}\,r^4 + \dfrac{2mk}{L^2}\,r^3 - r^2}} = \int \mathrm{d}\theta$$

La integral la sacamos de tablas, con $a = \dfrac{2mE}{L^2}$ y $b = \dfrac{2mk}{L^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{a\,r^4 + b\,r^3 - r^2}} = \arccos \frac{\dfrac{2}{rb} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{4a}{b^2}}}$$

y queda

$$\arccos \frac{\dfrac{L^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}}} = \theta \quad \longrightarrow \quad \frac{\dfrac{L^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}}} = \cos\theta \quad \longrightarrow \quad \frac{L^2}{mkr} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}\,\cos\theta$$

$$\longrightarrow \quad \frac{L^2}{mkr} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}\,\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \boxed{r = \frac{L^2/mk}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}}\,\cos\theta}}$$

Esto es exactamente de la forma

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}} \\ p = \dfrac{L^2}{mk} \end{cases}$$