Repaso de propagación de incertezas

Se puede obtener en forma indirecta la magnitud W, midiendo en forma directa las magnitudes *x, y, z,* etc. independientes entre sí, mediante una función $f\,(x, y, z, ...)$ que las relacione tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

Entonces a partir de las mediciones directas, conocemos los valores:

$$x_o \pm \Delta x$$
$$y_o \pm \Delta y$$
$$z_o \pm \Delta z$$
$$...$$

se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W_o \pm \Delta W$ siendo:

$$W_o = f(x_o, y_o, z_o, ...) \qquad (1)$$

$$\Delta W = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta z \right]^2 + ... \right\}^{1/2} \qquad (2)$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada parcial de f con respecto a *x*, que se obtiene considerenado a *x* como la única variable y al resto (*y, z, …*) como constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial de la función, se evalúa dicha expresión en los valores medios (x_o, y_o, z_o, …). De la misma forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada de *f* con respecto a la variable *y*, considerando al resto (*x, z, …*) constantes, etc.

La expresión (2) se conoce como *fórmula de propagación de errores*. Es válida siempre que las mediciones de *x, y, z,…* sean independientes (*independencia* significa que conocer la incerteza de la magnitud *x* no nos da ninguna información acerca de la incerteza de la magnitud *y*; y es lo que ocurre siempre que medimos ambas magnitudes realizando experimentos independientes). La expresión (2) es una fórmula aproximada para ΔW, que es válida cuando las derivadas parciales de f de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación).

Ejemplos

a) Si se quiere medir el área S de una mesa rectangular de lados $A_o \pm \Delta A$ y $B_o \pm \Delta B$.
El resultado de la medición indirecta de esta magnitud será $S_o \pm \Delta S$.
El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$S_o = A_o .B_o$$

Y su incerteza

$$\Delta S = \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \left[B_o \cdot \Delta A \right]^2 + \left[A_o \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2}$$

donde $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = B_o$ y $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = A_o$.

b) ¿ y si se quiere medir el perímetro $P_o \pm \Delta P$ de la misma mesa?

En este caso se puede usar que $P = 2 \cdot A + 2 \cdot B$

Entonces $P_o = 2 \cdot A_o + 2 \cdot B_o$

$$\Delta P = \left\{ \left[\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \left[2 \cdot \Delta A \right]^2 + \left[2 \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2}$$

ya que $\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) = \frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) = 2$

c) Para pensar: ¿y si quisiéramos obtener el volúmen $V_o \pm \Delta V$ de un cuerpo esférico a partir de la medición de su diámetro $D_o \pm \Delta D$, usando $V = \frac{4}{3}\pi \cdot D^3$? ¿Qué valor le asignarían a π? ¿ π tiene incerteza? ¿Por qué?

d) Para pensar (un poco más…): si medimos N veces una misma magnitud, siempre con la misma incerteza, es decir, obtenemos como resultado los rangos: $x_1 \pm \Delta x$, $x_2 \pm \Delta x$,…, $x_N \pm \Delta x$, y queremos obtener el promedio de las mediciones: $\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) / N$. ¿ Cuál será la incerteza de $\bar{x}$?

Diagnóstico de laboratorio

Pueden resolver en esta misma hoja

Problema 1:

1a) ¿Cuál es el error de apreciación que se comete toda vez que se mide una longitud con la regla de la figura? Marcar la respuesta correcta y justificar brevemente.

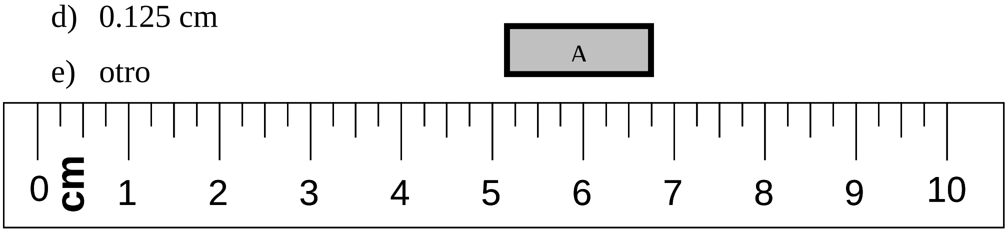
a) 1cm

b) 0.5 cm

c) 0.25 cm

d) 0.125 cm

e) otro



1b) ¿Qué longitud tiene el objeto A?

Problema 2:

2a) Corrija en todos los casos que sea necesario la presentación de los siguientes resultados:

a) v = (12.0 ± 0.2) m/seg

b) X = (0.0002548 ± 3 10^{-8}) m

c) X = 431 ± 1.22

d) T = 288.5K ± 1K

e) m = (0.12566 ± 0.001477) mm

f) V = 154.33 ± 0.199 Volts

donde v = velocidad, X = posición, T = temperatura, m = masa, V = voltaje.

2b) Indique que magnitud se midió con mayor precisión.

Problema 3

Se realizaron 10 mediciones del tiempo de vida de un fluoróforo. Luego de analizar los datos se obtuvieron el valor medio $<\tau>$, el error sistemático σ_{sist} y el error estadístico σ_{est} que se detallan a continuación:

$<\tau>$ = 2.05 ns

σ_{est} = 0.11253 ns

σ_{sist} = 0.01785 ns

3a) ¿Cómo reportaría el resultado de la medición?

3b) Si aumento el número de mediciones de N=10 a N=10000 manteniendo exactamente el mismo método de medición, ¿Cómo espera que cambie lo reportado en el punto a) ? ¿Por qué?

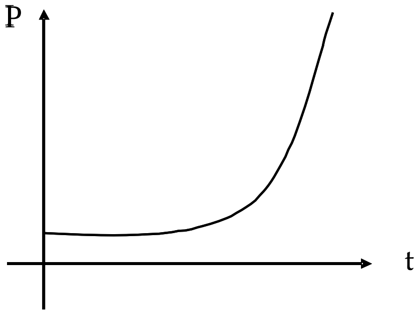
Problema 4

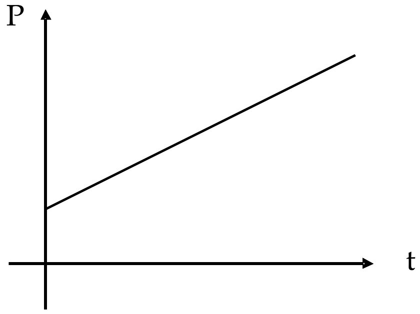
Bajo ciertas condiciones, la población de bacterias en función del tiempo para un preparado a temperatura ambiente crece según la ley:

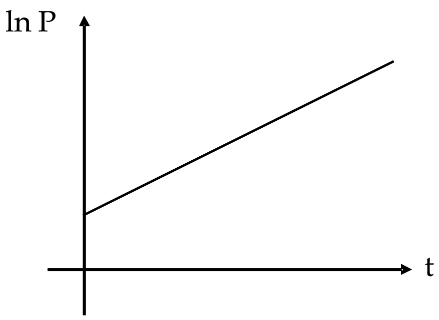
$$P(t) = p_0 \cdot e^{\alpha t}$$

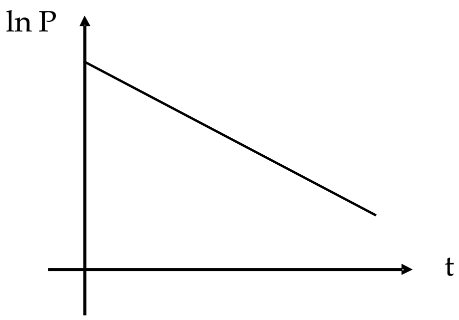
Donde P es la población en un determinado tiempo, p_o la población inicial de bacterias y α es una constante **positiva**.

4a) Indique cuales de los siguientes gráficos describen correctamente la situación planteada (Marque **todas** las respuestas correctas)









4b) En el/los gráficos correctos, indique que tipo de función usaría para hacer un ajuste de los datos y que información obtiene de cada uno de los parámetros del ajuste.

Problema 5

Queremos medir el área de una mesa, y medimos largo y ancho con una regla. Obtuvimos valores de L=(0.78±0.01)m y W=(1.13±0.01)m. ¿Cuál es el valor calculado del área? ¿Cuál es la incerteza de la medición del área? Si no te acordás cómo propagar errores, repasalo y ESTIMÁ cuánto crees que debería ser la incerteza.