Apunte extra sobre choques elásticos

P. Cobelli

Curso de Física I (Q), 1er. cuatrimestre de 2016

1. Choque elástico en 2 dimensiones

Vamos a considerar un choque elástico, del que participan dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2. Antes del choque, la masa m_1 tiene una velocidad inicial $\vec{v}_{1i}$ y la masa m_2 una velocidad inicial $\vec{v}_{2i}$. El objetivo ahora es determinar, a partir de las leyes de conservación que vimos en las clases teóricas, qué relación hay entre estos datos iniciales ($\vec{v}_{1i}, \vec{v}_{2i}, m_1$ y m_2) y las velocidades de ambas partículas después del choque, es decir, $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$.

2. Cantidades conservadas

Dado que el sistema formado por ambas partículas es un sistema aislado, sabemos que el impulso lineal total del sistema se conserva, y esto vale tanto para un choque elástico como para uno no elástico.

Por otro lado, siendo que estamos considerando un choque elástico, sabemos que la energía cinética total del sistema se conserva.

3. Formulación matemática del problema

La conservación del impulso lineal total del sistema puede formalizarse por medio de la ecuación

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}. \tag{1}$$

Por otro lado, la conservación de la energía cinética establece que

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2f}^2. \tag{2}$$

Estas son las dos ecuaciones que debemos resolver para obtener las velocidades finales de cada partícula en términos de las masas y las velocidades iniciales respectivas. Lo que sigue es únicamente un racconto de una de las formas posibles de obtener tales soluciones.

4. Resolución del problema

En primer lugar, vamos a trabajar con la ecuación de conservación de la energía cinética total del sistema. Dado que cada sumando tiene un factor multiplicativo 1/2, vamos a cancelarlo en cada uno de dichos términos. En segundo lugar, llevemos todos los términos a un mismo lado de la ecuación, y agrupémoslos de acuerdo al factor de masa, sea m_1 o m_2. Haciendo esto, la ecuación (2) se convierte en

$$m_1\left(\vec{v}_{1f}^2 - \vec{v}_{2f}^2\right) + m_2\left(\vec{v}_{2f}^2 - \vec{v}_{2i}^2\right) = 0. \tag{3}$$

Ahora podemos desarrollar los términos entre paréntesis como

$$m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}\right)\cdot\left(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{1i}\right) + m_2\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}\right)\cdot\left(\vec{v}_{2f} + \vec{v}_{2i}\right) = 0, \tag{4}$$

donde hemos representado el producto escalar entre dos vectores mediante el símbolo '$\cdot$', en la última expresión.

Volvamos ahora, por un momento, a la ecuación (1) y observemos que podemos reescribirla como

$$-m_1\left(\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{1i}\right)=m_2\left(\vec{v}_{2f}-\vec{v}_{2i}\right). \tag{5}$$

Reemplazando esta ecuación en la ec. (4), se llega a

$$m_1\left(\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{1i}\right)\cdot\left(\vec{v}_{1f}+\vec{v}_{1i}\right)-m_1\left(\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{1i}\right)\cdot\left(\vec{v}_{2f}+\vec{v}_{2i}\right)=0. \tag{6}$$

Esta última ecuación puede reescribirse más sencillamente como

$$m_1\left(\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{1i}\right)\cdot\left[\left(\vec{v}_{1f}+\vec{v}_{1i}\right)-\left(\vec{v}_{2f}+\vec{v}_{2i}\right)\right]=0. \tag{7}$$

Ahora bien, qué soluciones tiene esta ecuación? Por un lado, vemos que una solución posible sería que se anulase el paréntesis de esta última ecuación, lo que sucede si $\vec{v}_{1f}=\vec{v}_{1i}$. Sin embargo, si reemplazamos esta solución en la ec. (5) observamos que eso nos lleva a concluir que $\vec{v}_{2f}=\vec{v}_{2i}$. Es decir que la solución que se deriva de la anulación del paréntesis en la última ecuación nos lleva a un escenario físico donde los vectores de velocidades iniciales y finales de las partículas permanecen inalterados, es decir, donde no hay interacción entre ellas. Por esta razón, descartamos esta primera solución, que resulta matemáticamente correcta pero físicamente no significativa para el problema que buscamos resolver.

Luego la única alternativa es que el término entre corchetes de la última expresión resulte nulo. Esto implica entonces que

$$\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{2f}=-\left(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{2i}\right), \tag{8}$$

es decir que las velocidades relativas antes y después del choque tienen la misma magnitud y dirección, y sentido contrario.

En este punto tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones (vectoriales), dadas por la ec. (5) y la ec. (8) con dos incógnitas: $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$. En la siguiente subsección vamos a abordar en detalle *una* de las formas de resolver este sistema de ecuaciones.

4.1. Resolución del sistema de ecuaciones resultante

Las ecuaciones (5) y (8) pueden reescribirse como:

$$\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{2f}=\vec{v}_{2i}-\vec{v}_{1i}, \tag{9}$$

$$m_1\vec{v}_{1f}+m_2\vec{v}_{2f}=m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i}, \tag{10}$$

donde lo que hicimos fue dejar del lado izquierdo las velocidades finales, y del lado derecho las iniciales (que, desde el principio, estamos asumiendo conocidas, junto con las masas). Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede reescribirse en su forma matricial como

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}_{1f}\\ \vec{v}_{2f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}_{2i}-\vec{v}_{1i}\\ m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i}\end{pmatrix}. \tag{11}$$

La ventaja de adoptar esta formulación matricial es la de poder obtener una solución al sistema en términos de la regla de Cramer, que es una herramienta del álgebra lineal que nos ofrece la solución a un sistema lineal de ecuaciones (tal como el que tenemos) en términos de determinantes. Aplicada al caso que estamos resolviendo, la regla de Cramer nos dice que las soluciones al sistema lineal son:

$$\vec{v}_{1f}=\frac{\det\begin{pmatrix}\vec{v}_{2i}-\vec{v}_{1i} & -1\\ m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i} & m_2\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}}, \tag{12}$$

y

$$\vec{v}_{2f} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i} \\ m_1 & m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}}, \tag{13}$$

donde por 'det' se simboliza la operación *determinante* de la matriz que es argumento de dicha función.

Calculemos explícitamente los tres determinantes distintos que estas dos ecuaciones requieren para obtener una solución cerrada al problema. Comencemos por el más sencillo de ellos, el determinante que es común a ambas expresiones y que figura en sus denominadores. Tenemos:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot m_2 - (-1) \cdot m_1 = m_1 + m_2.$$

A continuación consideremos entonces la solución para $\vec{v}_{1f}$ que obtuvimos, dada por la ecuación (12), y trabajemos sobre el numerador, ya que el denominador acabamos de calcularlo. Resulta entonces

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{1f} &= \frac{\det\begin{pmatrix} \vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i} & -1 \\ m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} & m_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{m_1+m_2}\det\begin{pmatrix} \vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i} & -1 \\ m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} & m_2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_2(\vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i}) + m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}\right] = \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_2\vec{v}_{2i} - m_2\vec{v}_{1i} + m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}\right] = \frac{1}{m_1+m_2}\left[2m_2\vec{v}_{2i} - m_2\vec{v}_{1i} + m_1\vec{v}_{1i}\right] = \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[2m_2\vec{v}_{2i} + (m_1 - m_2)\,\vec{v}_{1i}\right] = \\
&= \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}.
\end{aligned}$$

Similarmente, para $\vec{v}_{2f}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{2f} &= \frac{1}{m_1+m_2}\det\begin{pmatrix} 1 & \vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i} \\ m_1 & m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} - m_1\vec{v}_{2i} + m_1\vec{v}_{1i}\right] = \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[2m_1\vec{v}_{1i} - (m_1 - m_2)\vec{v}_{2i}\right] = \\
&= \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} - \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}.
\end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido:

$$\vec{v}_{1f} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_{1i} + \left(\frac{2\,m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_{2i}, \tag{14}$$

$$\vec{v}_{2f} = \left(\frac{2\,m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_{1i} - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_{2i}, \tag{15}$$

expresiones que vinculan las velocidades (vectoriales) después del choque elástico con las variables asociadas al estadío anterior a la interacción y a las masas de los cuerpos intervinientes.

4.2. Simetría del resultado obtenido

Las expresiones obtenidas tienen que ser simétricas si cambiamos los nombres de las partículas, es decir, si cambiamos en ellas 1 por 2 y 2 por 1. Haciendo esto en la ecuación (14), tenemos:

$$\vec{v}_{2f} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{2i} + \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{1i},$$

expresión que podemos rearreglar para obtener

$$\vec{v}_{2f} = -\left(\frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{2i} + \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{1i},$$

y finalmente obtenemos

$$\vec{v}_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{2i},$$

expresión que resulta idéntica a la ecuación (15). De la misma forma, cambiando 1 por 2 y 2 por 1 en la ecuación (15), tenemos

$$\vec{v}_{1f} = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{2i} - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{1i}.$$

Rearreglando esta expresión, obtenemos fácilmente

$$\vec{v}_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\right)\vec{v}_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{2i},$$

ecuación que resulta igual a la ecuación (14).

Estos dos cálculos simples sirven para mostrar que el resultado que obtuvimos en la sección precedente respeta la simetría asociada a intercambiar entre sílas partículas.

4.3. Masas iguales

Si $m_1 = m_2$, entonces resulta evidente que $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2i}$ y $\vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1i}$. Es decir, las partículas 'intercambian' velocidades si ambas tienen igual masa. Esto es lo que uno observa en la vida diaria, por ejemplo, en el pool o en el billar. Por ejemplo, si una bola se encontraba inicialmente en reposo y otra (de igual masa) la choca, la partícula originalmente en movimiento queda en reposo y la otra 'toma' su velocidad. Observemos que si $\vec{v}_{2i} = 0$, las expresiones obtenidas anteriormente se reducen a

$$\vec{v}_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{1i}, \tag{16}$$

$$\vec{v}_{2f} = \left(\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{1i}. \tag{17}$$

4.4. Masas muy distintas

Si m_1 es mucho más grande que m_2 y $\vec{v}_{2i} = 0$, vemos de las ecuaciones obtenidas que $\vec{v}_{1f} \approx \vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{2f} \approx 2\vec{v}_{1i}$. Es decir, cuando una partícula masiva choca con otra de masa mucho menor e inicialmente en reposo, la partícula 'pesada' continúa su movimiento casi inalterada luego de la interacción, y la partícula 'ligera' rebota a una velocidad aproximadamente igual al doble de la inicial (en módulo) de la partícula más masiva.

Un ejemplo de este tipo de colisión es el de un átomo pesado, tal como el uranio, con un átomo más ligero, como el hidrógeno. Si $m_2 \gg m_1$ y la partícula 2 está inicialmente en reposo, entonces $\vec{v}_{1f} \approx -\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{2f} \approx \vec{v}_{2i} = 0$. Esto implica que cuando una partícula ligera choca con otra

más masiva que se encuentra inicialmente en reposo, la partícula ligera revierte su velocidad y la masiva permanece aproximadamente en reposo.

Nota del autor.
Este apunte tiene como único objetivo que los estudiantes dispongan de una versión impresa de la derivación que realizamos en teóricas, que puede resultarles trabajosa de seguir, razón por la cuál recopilé este apunte breve. Como tal, no reemplaza las explicaciones dadas en clase sino que las complementa.