¿Por qué a un gato y a un elefante les toma el mismo tiempo vaciar sus vejigas?

P. Cobelli

Curso de Física I (Q), 1er. cuatrimestre de 2016

Acerca de este documento

Este documento es un breve comentario al artículo: "Law of Urination: all mammals empty their bladders over the same duration", publicado en 2014 por Patricia Yang, Jonathan Pham, Jerome Choo y David Hu, del Georgia Institute of Technology (Estados Unidos). Como tal, no intenta ser una explicación detallada o pormenorizada de dicho trabajo sino un comentario vinculado con una aplicación interesante del teorema de Bernoulli que vimos en clase.

1. Resultados del estudio experimental

Los autores del trabajo realizaron un estudio experimental basado en el análisis de dos tipos de datos:

- videos tomados con cámaras rápidas y
- mediciones de caudal instantáneo;

ambos realizados en el Zoológico de Atlanta. Este estudio experimental realizado sobre diversos animales les permitió contruir el gráfico que se muestra en la Figura 1 (tomado de su publicación), en escala log-log.

La Figura muestra el tiempo de vaciado de la vejiga (en ordenadas) en función de la masa del animal considerado. Los puntos (en verde y azul) representan los datos experimentales obtenidos por los autores. La separación de colores no es caprichosa: los puntos en azul denotan animales que evacúan sus vejigas con un chorro contínuo, mientras que los puntos en verde corresponden a animales cuyo sistema urinario no genera un chorro contínuo a la salida de la uretra sino un conjunto de gotas discretas. Por ahora vamos a ignorar la línea azul de la figura, que corresponde al modelo teórico que abordaremos más adelante.

Hagamos entonces una lectura rápida de los rasgos destacados de los resultados experimentales que reúne la Figura. Si nos concentramos en la nube de puntos azules, vemos que está compuesta por animales cuya masa va desde los 5 kg hasta los (aproximadamente) 10000 kg. Es decir, el estudio abarca un rango de masas que corresponde a 4 órdenes de magnitud. Lo sorprendente es que, aún con diferencias tan grandes de masa, un gato y un elefante tardan **aproximadamente** la misma cantidad de tiempo en vaciar completamente sus vejigas. Dicho de otra forma: la diferencia de masa de 4 órdenes de magnitud entre uno y otro animal no parece influir **considerablemente** en los tiempos de micción asociados: en el gato parece ser de 4 segundos, y en el elefante, de 10 segundos. Dos preguntas surgen naturalmente: ¿por qué a un gato y a un elefante les toma el mismo tiempo vaciar sus vejigas? y ¿puede la dinámica de fluidos ayudar a comprender este hecho?

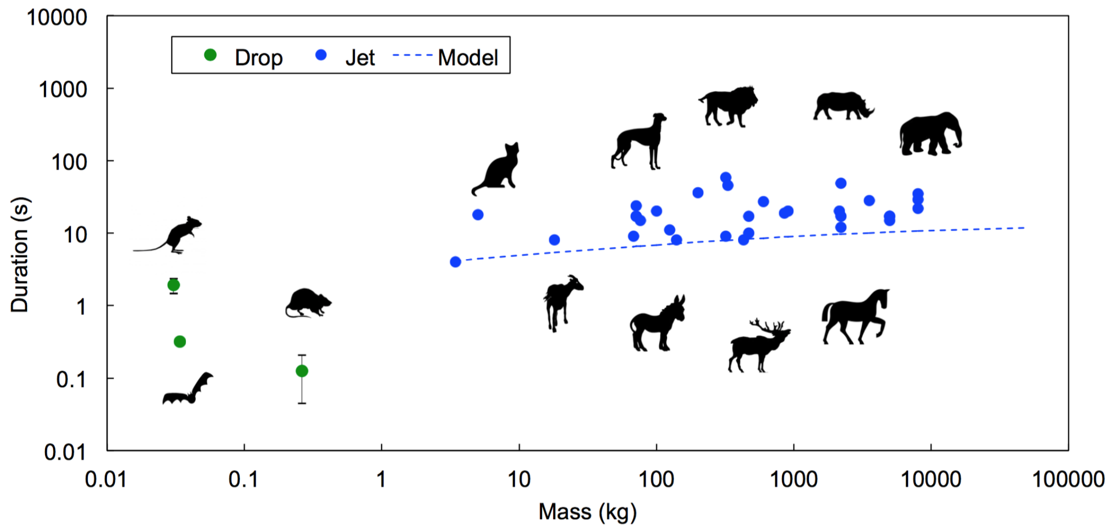

Figura 1: Urination time en función de la masa corporal del animal. El gráfico muestra los resultados experimentales obtenidos para animales en un rango de masas corporales desde 0.05 hasta 10000 kg. Nótese que la escala es logarítmica en ambos ejes.

2. Hacia un modelo teórico

Vamos entonces a intentar obtener un modelo aproximado para el tiempo de vaciado completo de la vejiga animal, que llamaremos (a falta de una buena traducción al castellano) 'urination time' e identificaremos con T, en función de la masa M del animal en cuestión.

Para ello consideramos que la vejiga es simplemente un recipiente de volumen V donde se aloja la orina, a una presión P_v. La vejiga se vacía por medio de la uretra, un conducto que supondremos cilíndrico, de diámetro D y largo L. Es decir que nuestro modelo de vejiga-uretra puede esquematizarse según se muestra en la Figura 2.

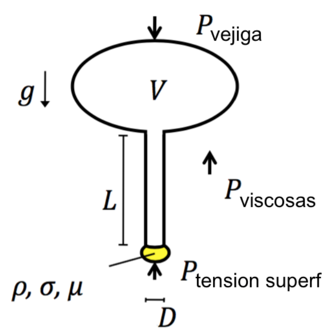

Figura 2: Modelo esquemático del sistema vejiga-uretra como el de un recipiente presurizado que se vacía a través de un conducto cilíndrico.

Si pensamos que el *urination time* está dado simplemente por el tiempo de vaciado libre de este recipiente a través del conducto, deberíamos preguntarnos qué factores resultan dominantes para la dinámica del fluido que escurre. Si el vaciado es libre, entonces los factores encargados de poner el movimiento el líquido son la presión de la vejiga y la diferencia de presión (debida a la gravedad) asociada con la columna de líquido de altura L alojada en la uretra. En este aspecto, el problema es perfectamente equivalente al del vaciado de un recipiente que vimos en clase (aunque en este caso, el recipiente está presurizado y cerrado a la atmósfera).

Ahora bien, podemos también pensar qué factores podrían limitar la tasa a la que el fluido escurre. Por un lado, tenemos la viscosidad del fluido. Podría suceder, por ejemplo, que el rozamiento del fluido (la orina) con las paredes fuese lo suficientemente significativo como para frenar apreciablemente el flujo. Vimos en clase que las pérdidas de presión por viscosidad en un conducto cilíndrico de largo L y diámetro D por el que fluye un fluido de viscosidad dinámica μ a un caudal

Q vienen dadas por

$$P_{viscosas} = \frac{128\mu QL}{\pi D^4},$$

expresión que podría resultar necesario tener en cuenta en nuestro modelo.

Por otro lado, podemos pensar en otro mecanismo distinto responsable también por pérdidas durante el vaciado. Si pensamos que se pueden formar gotas de líquido a la salida de la uretra (como en la boca de una canilla), esas gotas frenarían o resistirían el flujo de orina de forma similar a la que un globo lo hace si lo ubicamos a la salida de una canilla. En este caso, se trata de otra característica del fluido que no vimos en el curso: su tensión superficial.

En resumen: tenemos dos elementos motores y dos posibles fuentes de disipación. La pregunta es: ¿qué factores debería contener nuestro modelo, si buscamos retener la mínima complejidad posible que permita explicar razonablemente bien el fenómento *observado* en la experiencia?

Esta es una pregunta que el científico teórico se hace cada vez que construye un modelo. Y la respuesta es invariablemente la misma, sin importar qué se está modelando: son los estudios experimentales los encargados de poner de manifiesto cuáles, de entre todos los posibles mecanismos físicos, son los que dominan y determinan la dinámica del sistema bajo estudio.

En el caso de este trabajo, los autores fueron capaces de observar experimentalmente que en los animales estudiados que forman parte de la nube azul de puntos de la Figura 1, los efectos de la viscosidad y de la tensión superficial resultan despreciables. Este es un hecho que surge estrictamente de la evidencia experimental recogida por los autores. Esto es lo que permite afirmar entonces que las pérdidas viscosas y de superficie resultan despreciables frente a la presión P_v a la que la orina está sometida en la vejiga, y a frente a la diferencia de presión entre los extremos de la uretra (asociada al largo L de la misma y a la aceleración de la gravedad).

3. Daniel Bernoulli otra vez

En las condiciones precedentes, en las cuales se vacía un recipiente a presión bajo la acción de la gravedad, la ecuación que vincula la velocidad del flujo a la salida del conducto de escape (uretra) con su largo L y la presión del recipiente (vejiga) es la ecuación de Bernoulli:

$$P_v + \rho g L = \frac{1}{2}\rho v^2. \tag{1}$$

Esta será la ecuación fundamental del modelo, la cual deberemos además suplementar con información experimental adicional para obtener una solución al problema.

Por ejemplo, los autores pudieron establecer experimentalmente que la presión en la vejiga es **esencialmente** constante para diversos animales. Esto puede verse en la Figura 2(d) de su artículo, para mamíferos de masas comprendidas entre los 0.5 y los 100 kg. Esta pista experimental es de mucha importancia, dado que nos permite pensar a P_v como una constante en nuestro problema, independiente de la masa del animal considerado.

La velocidad de salida v puede entonces despejarse de la ecuación de Bernoulli, obteniendo entonces

$$v = \sqrt{2P_v/\rho + 2gL}. \tag{2}$$

A partir de esto, es posible obtener una expresión para T, el *urination time*, empleando la definición de caudal volumétrico $Q = V/T$. [Cuidado: no confundir la velocidad v con el volumen V!] Tenemos entonces:

$$T = \frac{V}{Q} = \frac{V}{\pi D^2\sqrt{2P_v/\rho + 2gL}}. \tag{3}$$

Esta es la ecuación que buscábamos. Una expresión que, conociendo la densidad de la orina, la presión de la vejiga y su volumen, y el largo y diámetro de la uretra, nos permite obtener el tiempo de vaciado, el *urination time*.

No obstante, este resultado no implica necesariamente que animales de distinta masa tengan urination times comparables. Esto sucede, básicamente, porque desconocemos qué relación existe entre

- el volumen V de la vejiga,
- la presión P_v en la vejiga,
- el diámetro D de la uretra,
- el largo L de la uretra, y

la masa M del animal. Es decir: sabemos que esas cuatro cantidades deben ser función de la masa del animal. Y si bien intuimos que el volumen de la vejiga de un gato debería ser menor que el correspondiente a un elefante, no sabemos en principio cuál es la relación matemática que vincula ambas variables. En otras palabras, para poder usar la ecuación (3) nos hace falta conocer la dependencia funcional de V, P_v, D y L con M; es decir: $V(M), P_v(M), D(M)$ y $L(M)$. Resulta claro además que dichas dependencias funcionales no surgirán de un análisis fluidodinámico del problema. Y en este punto volvemos al laboratorio.

4. Los sistemas vejiga-uretra son isométricos

La biología muestra que los sistemas vejiga-uretra son isométricos, es decir que las dimensiones espaciales asociadas al sistema escalan con la masa del sujeto del que son parte. Esto implica que el volumen de la vejiga V es proporcional a la masa del animal, que el largo de la uretra $L \propto M^{1/3}$, y que el diámetro de la misma también sigue una ley de tipo $D \propto M^{1/3}$. Los autores muestran también, en su trabajo, evidencia experimental de este hecho.

Usando entonces este nuevo hallazgo, la ecuación (3) puede reescribirse como:

$$T \propto M^{1/3} \left(2P_v/\rho + M^{1/3}\right)^{-1/2}. \tag{4}$$

Nótese que en esta última expresión hemos omitido las constantes de proporcionalidad dado que no buscamos predecir un valor concreto del urination time sino su dependencia con la masa del animal.

Vemos entonces que si $M^{1/3} \gg P_v/\rho$, la dependencia de T con M resulta:

$$T \approx M^{1/6} = M^{0{,}166}. \tag{5}$$

Esta es entonces la predicción que obtenemos del modelado teórico. Un ajuste de los datos experimentales mediante una ley de potencias arroja un exponente de 0,13; lo cuál indica que nuestro modelo teórico, a pesar de su simpleza, es capaz de reproducir adecuadamente lo observado en la naturaleza: que un gato y un elefante vacían sus vejigas en aproximadamente el mismo lapso. El ajuste se muestra en la Figura 3.

5. Otros animales 'orinan fuera del modelo'

En las Figuras 1 y 3 vemos que hay animales cuyo urination time no es bien representado por el presente modelo. Esto ocurre porque, en esos casos, el proceso de vaciado de la vejiga se produce por conductos muy pequeños, y no en la forma de un chorro contínuo sino en gotas. Los autores del trabajo llaman a este régimen *dripping*, o goteo. En este régimen, una parte no despreciable de la energía se invierte en la generación misma de las gotas (generar una gota es un proceso caro energéticamente dado que es necesario curvar la superficie libre!), mecanismo que no está contemplado en el modelo que les comenté líneas arriba.

6. Para saber más y/o en más detalle

Aquellos que quieran conocer más y/o en mayor detalle acerca de estos resultados pueden leer el artículo en línea, disponible al público general en: `http://arxiv.org/pdf/1310.3737v3`.

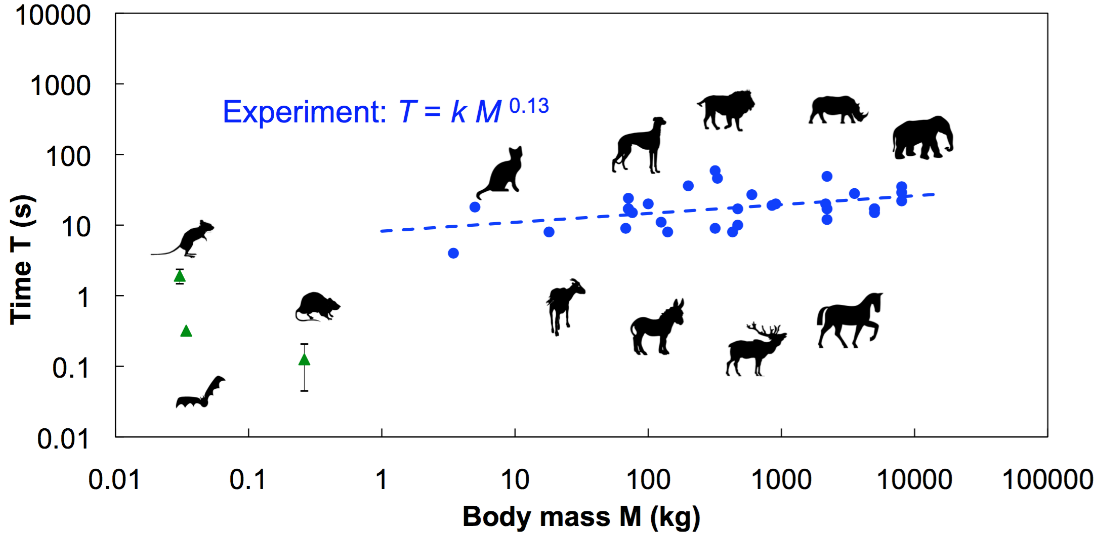

Figura 3: Urination time en función de la masa corporal del animal. El gráfico muestra demás el resultado de un ajuste de los datos experimentales (nube azul) mediante una ley de potencias.