Guía 9: Viscosidad y fluidos

Cátedra Mónica Pinkholz - Laboratorio Martes y Viernes
Dept. Física, FCEyN, UBA.

Junio 2020

Los modelos simplificados a menudo imponen hipótesis muy irreales en función de obtener una expresión simple que de cuenta de lo esencial del fenómeno. Por ejemplo, al ver caída libre vemos que se asumen masas puntuales que caen en el vacío, despreciando fenómenos como la fricción del aire, el volumen del objeto, etc. Para mejorar la capacidad predictiva de un modelo es necesario agregarle parámetros que permitan describir la parte del fenómeno que se estaba obviando. En esta guía tomaremos un ejemplo de dinámica de fluidos que nos permitirá ver cómo cambia el resultado de un fenómeno simple como una caída libre, al incorporar fenómenos como el empuje y la fricción del fluido.

1. Introducción

Cuando un cuerpo se mueve en caída libre en el vacío, el mismo se encuentra sometido sólo a la acción de su peso. Su aceleración es constante (e igual a "g") y su velocidad aumenta proporcionalmente con el tiempo. ¿Qué diferencia hay cuando el movimiento de caída ocurre en un fluido viscoso, ya sea en aire o en un líquido?. En la Figura 1 se muestra el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo que cae en un medio viscoso. Además de a su propio peso P, el cuerpo es sometido a una fuerza denominada "empuje" E (por el principio de Arquímedes), de sentido contrario al peso, por el solo hecho de encontrarse sumergido. Además, si el cuerpo se mueve aparece una fuerza viscosa R que se opone al movimiento del cuerpo. A diferencia de la fuerza de rozamiento dinámico entre dos superficies, esta fuerza viscosa es proporcional a la velocidad y depende también del tamaño y forma del cuerpo.

El peso puede escribirse en función del volumen y la densidad de la esfera como se muestra en la ecuación (1).

$$P \;=\; m\,g \;=\; \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_{esfera} \cdot g \tag{1}$$

Donde r es el radio de la esfera y ρ_{esfera} su densidad. Según el principio de Arquímedes, el empuje es igual al peso del líquido desalojado, es decir que la expresión es similar pero usando la densidad del líquido: $\rho_{liquido}$, ec. (2).

$$E = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_{liquido} \cdot g \tag{2}$$

Para el caso de una esfera en un flujo laminar, la fuerza viscosa puede expresarse según la Ley de Stokes, ec. (3).

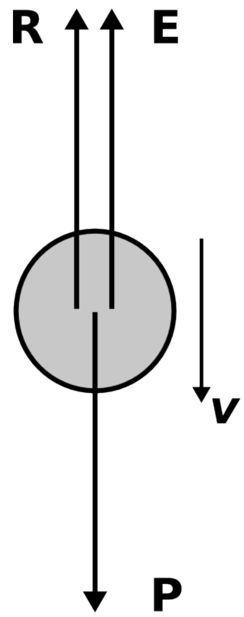

Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una esfera en el seno de un fluido viscoso.

$$R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v \tag{3}$$

donde η es el coeficiente de viscosidad del fluido y v su velocidad. Planteando la segunda Ley de Newton a partir de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo (Figura 1) se obtiene la siguiente relación (4) :

$$m\,a = P - E - R \tag{4}$$

Donde a es la aceleración del cuerpo. Puede verse que al aumentar la velocidad, aumenta la fuerza viscosa y se reduce la aceleración. En el límite en que la aceleración de hace nula, la velocidad se hace constante alcanzando su valor límite ($v \to v_{lim}$). En este punto vale la relación (5).

$$R \;=\; E - P \tag{5}$$

Reemplazando las ecuaciones (1), (2) y (3), en (5), y despejando es posible obtener una expresión para la velocidad límite, ec. (6) .

$$v_{lim} \;=\; \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 g}{\eta} \cdot \left(\rho_{esfera} - \rho_{liquido}\right) \tag{6}$$

Esta expresión es válida en tanto se cumplan las hipótesis bajo las que Stokes dedujo la ec. (3), que son:

I. El cuerpo se debe mover a un velocidad constante.

II. El líquido en que se mueve debe tener un extensión infinita, con una velocidad CERO en infinito.

III. El fluido debe tener un comportamiento laminar y sin turbulencias. Esto se logra cuando el número del Reynolds para el sistema es $Re < 0,5$ (veremos esto más adelante).

La primera condición se cumple si se llega a una velocidad límite. La segunda es imposible de cumplir en un entorno realista. Para un entorno de tamaño limitado (tubos de fluido de radio R), Ladenburg propuso un factor de corrección λ que permite relacionar la velocidad final efectiva v_{medida} con la velocidad límite del modelo de Stokes v_{lim}:

$$v_{lim} = \lambda \cdot v_{medida} \tag{7}$$

Cuya expresión es:

$$\lambda \;=\; 1 + 2{,}4\frac{r}{r_{tubo}} \tag{8}$$

siendo v_{medida} la velocidad límite medida para el movimiento dentro del recipiente.

Por último, la condición III nos permite verificar si en una medición determinada estamos dentro de los límites de las hipótesis de Stokes. Sin entrar en detalle, el número de Reynolds Re es una relación entre las magnitudes de los parámetros que determinan la dinámica de un fluido. Para este caso es:

$$Re \;=\; \frac{\rho_{liquido} \cdot v_{lim} \cdot d}{\eta} \tag{9}$$

donde d es el diámetro de la esfera.

Más allá de este resultado es importante notar que la ecuación (4) es una ecuación dinámica, y que existe un régimen transitorio hasta llegar a los valores cercanos a la velocidad límite (que por otro lado, nunca se alcanza). Escribiendo la ecuación (4) como ecuación diferencial y agrupando las constantes, se obtiene la expresión (10).

$$\ddot{x} = \beta - \alpha\dot{x} \tag{10}$$

Proponiendo como solución una exponencial (homogenea) más una lineal (particular), y que parte con velocidad nula como condición de contorno obtenemos las siguientes expresiones para la posición y la velocidad en función del tiempo:

$$x(t) = v_{lim}t + \frac{v_{lim}}{\alpha}e^{-\alpha\, t} \tag{11}$$

$$\dot{x}(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-\alpha\, t}\right) \tag{12}$$

En esta experiencia de laboratorio se estudiará el movimiento de caída de una esfera en el seno de un fluido, registrada con una cámara y utilizando el programa de análisis de imágenes *Tracker* [1] para extraer la posición de la esfera en función del tiempo. A partir de las mediciones se espera obtener una descripción del movimiento y un valor para la viscosidad (η). Este método para determinar la viscosidad de un fluido es conocido como el método de Stokes.

[1] `http://physlets.org/tracker/`

2. Actividades

Se dispone de un cuaderno de laboratorio donde se describen la realización de dos series de experimentos. En ellos se filma la caída de esferas de metal dentro de una solución de glicerina y agua. Se dispone además de los videos de las experiencias grabadas.

Se deberán analizar los videos. Para ello se dispone del programa de Software Libre *Tracker* (es un software gratuito creado por *Open Source Physics*). El programa permite hacer seguimiento de objetos en el video, calibrar distancias y extraer información de trayectorias en el tiempo de los cuerpos estudiados. Utilizando la información del cuaderno de laboratorio se pueden deducir los parámetros necesarios para calibrar las distancia o corregir las escalas de tiempos.

Se propone entonces:

1. Analizar los videos de cada Experiencia con Tracker para extraer la información de posición en función del tiempo de cada uno (esto es $y(t)$).

2. Con un programa de cálculo, obtener las velocidades en función del tiempo (esto es, $\dot{y}(t) = v(t)$. En *Origin* esto se puede hacer mediante el cálculo de derivada numérica: `( Col(y)[i+1]-Col(y)[i] ) / ( Col(t)[i+1]-Col(t)[i])`.

3. Graficar $v(t)$ y obtener la velocidad límite medida v_{medida} de cada bolita. Se puede usar un ajuste no lineal por una exponencial decreciente. También se puede tomar datos de velocidad en la zona estacionaria, si se llega a alcanzar esa velocidad antes de que la esfera toque el piso.

4. Para cada serie de mediciones, calcular v_{lim} corregido mediante el factor de Ladenburg (7). Luego, graficar v_{lim} vs r (radio de bolita).

5. Realizar un ajuste de los datos de v_{lim} vs r para hallar η considerando la ecuación (6). Los parámetros del sistema que hagan falta se pueden deducir de la información del cuaderno de laboratorio.

Ayuda:

- Video rápido de uso de Tracker: `https://www.youtube.com/watch?v=n4Eqy60yYUY`.
- Referencia de funciones del programa (en inglés): `https://physlets.org/tracker/help/frameset.html`
    - Las funciones útiles son el sistema de coordenadas (*Coordinate System*), la calibración (*Calibration Points*), el auto-tracker y la cinta de medición (*Tape Measure*), esta última para medir distancias dentro de la imagen.

3. Trabajo a entregar el Jueves 23/7

Informe en PDF:

1. Que siga las estructura que vimos de informes, incluyendo introducción teórica y descripción experimental.

2. Reporte de las velocidades en función del tiempo obtenidas para las esferas en cada experimento. Si se usaron ajustes para deducir la velocidad final, incluirlos en los gráficos y reportar los parámetros hallados.
3. Gráfico de v_{lim} corregida por el factor de Landeburg vs r. Ajuste de la ecuación (11) para obtener η. Siempre con ERROR y UNIDADES.
4. **Opcional:** Comparar el valor hallado de η con las tablas de valores esperables para la solución usada. Estimar el rango de temperaturas que debía tener el fluido para que sea compatible con el valor de η hallado.