Bienvenidos a los TPs Virtuales de F1Q 2020

DOCENTES

- Graciana Puentes (JTP) Email: gpuentes@df.uba.ar
- Leonel Gruneiro (Ay. 1ra) Email: gruleo@gmail.com
- Maxi Inafuku (Ay. 2da) Email: maxi-46@hotmail.com

CONSULTAS VIA PLATAFORMA ZOOM

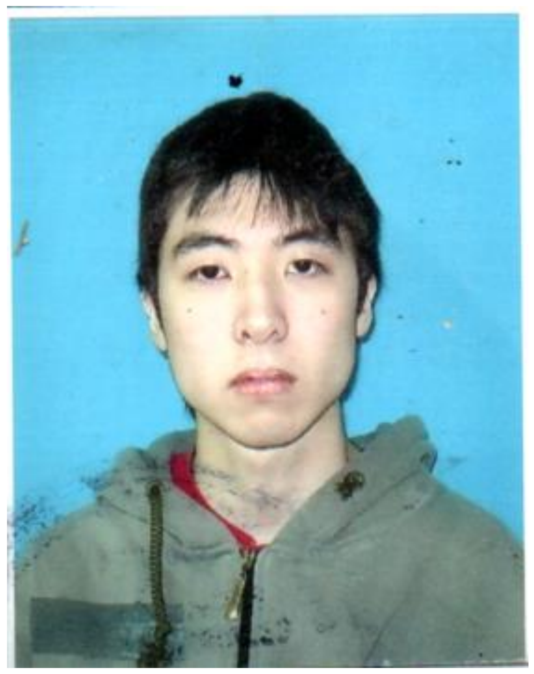
- Turno A - 19-20hs (G. Puentes)
- Turno B - 20- 21hs (L. Gruneiro/M. Inafuku)

FECHAS IMPORTANTES (VER CRONOGRAMA ACTUALIZADO)

- 1er Parcial (Modalidad Presencial - A confirmar) - 08/06/2020
- 2do Parcial (Modalidad Presencial - A confirmar) - 20/07/2020
- 1er Recuperatorio (Modalidad Presencial - A confirmar) - 27/07/2020
- 2do Recuperatorio (Modalidad Presencial - A confirmar) - 05/08/2020

Graciana Puentes (JTP)

Leonel Gruneiro (Ay. 1ra)



M. Inafuku (Ay. 2da)

I. GUIA 0 - REPASO DE VECTORES

Vector $\vec{A}$: Segmento orientado
Origen - $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
Extremo - $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

A. Representacion Cartesiana

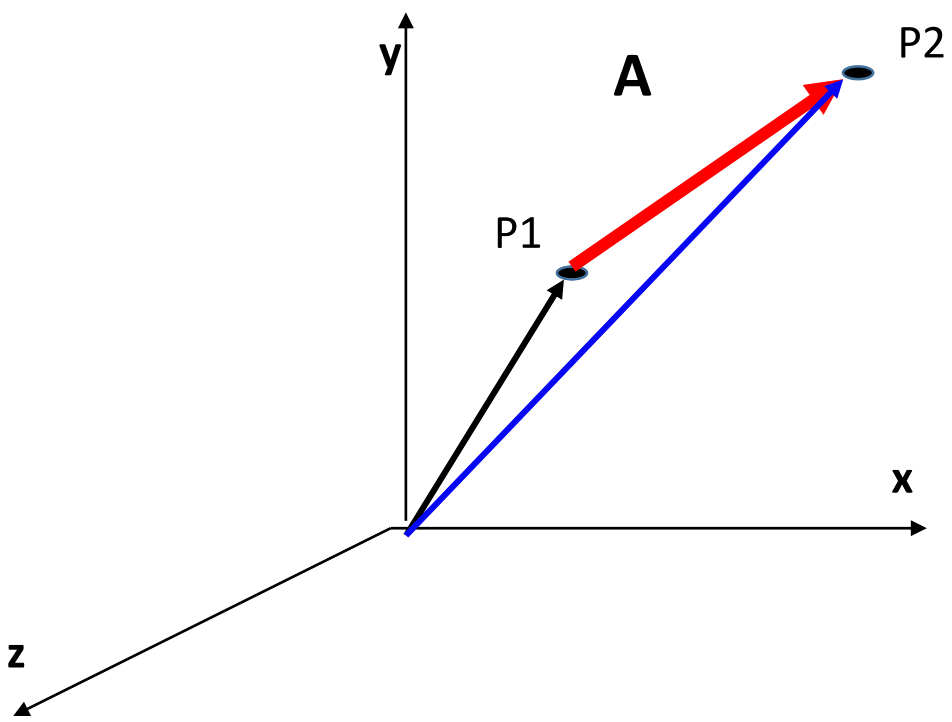
$\vec{A} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$ donde $\vec{P_1}$ es el vector de Origen $O = (0,0,0)$ y Extremo $E = P_1$

donde $\vec{P_2}$ es el vector de Origen $O = (0,0,0)$ y Extremo $E = P_2$

$\vec{A} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Modulo de un vector $|\vec{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



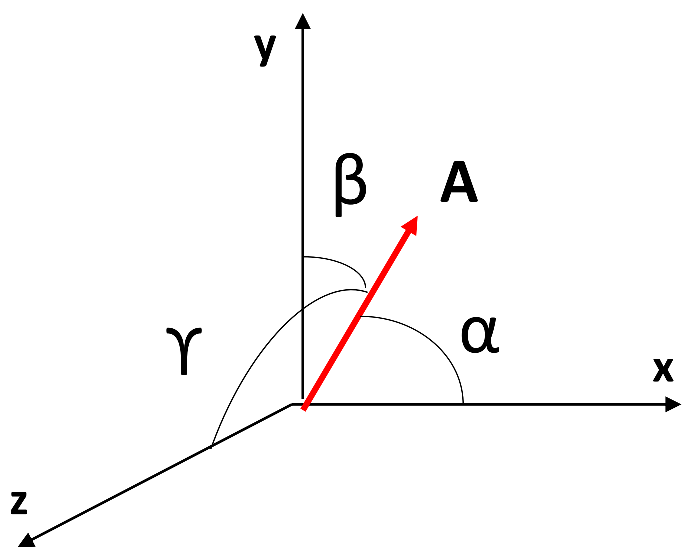
B. Ej. (1) - Hallar el modulo del vector $\vec{A}$ de origen O y Extremo E

Origen $O = (20, -5, 8)$ y extremo $E = (-4, -3, 2)$
$|\vec{A}| = \sqrt{(-4-20)^2 + (-3+5)^2 + (2-8)^2}$
$|\vec{A}| = \sqrt{(24)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 24.8193$

II. RELACIONES TRIGONOMETRICAS

Permiten pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas (3D) o polares (2D)

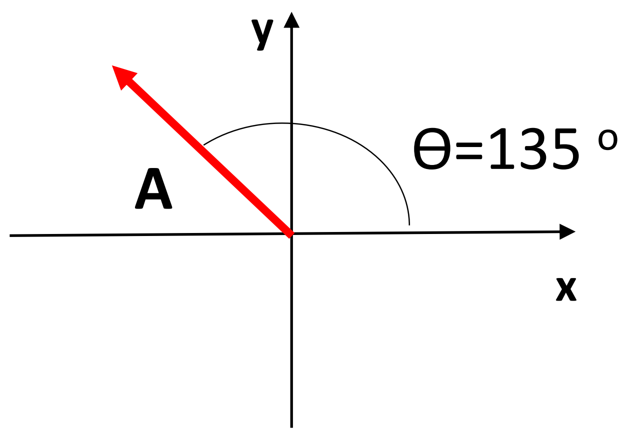
$\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$ cuyas componentes cartesianas forman angulos respectivos (α, β, γ) con los ejes $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$



Utilizando relaciones trigonometricas, tenemos $a_x = |\vec{A}|\cos(\alpha)$, $a_y = |\vec{A}|\cos(\beta)$, $a_z = |\vec{A}|\cos(\gamma)$
Lo cual es equivalente a $\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{A}|}$, $\cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{A}|}$, $\cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{A}|}$

A. Ej. (2) Pasar de coordenadas polares 2D $(|\vec{A}|, \theta)$ a cartesianas (a_x, a_y) y viceversa

2(a) Datos $|\vec{A}| = 4$, $\theta = 135°$

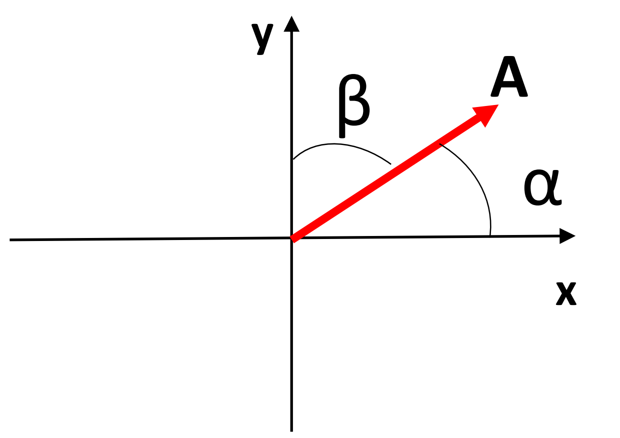


Utilizando relaciones trignometricas obtenemos:

$a_x = |\vec{A}|\cos(135°) = 4.\frac{-1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$
$a_y = |\vec{A}|\cos(45°) = 4.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

2(b) Datos $\vec{A} = (3, 3)$, hallar (α, β)

Utilizando modulo y relaciones trignometricas obtenemos:



$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
con lo cual $\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{A}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
con lo cual $\cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{A}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o sea $\alpha = \beta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

III. OPERACIONES VECTORIALES

A. Multiplicacion por escalar

Dado un escalar λ la multiplicacion de un vector por un escalar $\lambda.\vec{a}$ resulta en:

- vector paralelo a $\vec{a}$
- modulo resultante $|\lambda|.|\vec{a}|$
- $\lambda > 0 =$ sentido
- $\lambda < 0 \neq$ sentido

B. Vectores unitarios (versores)

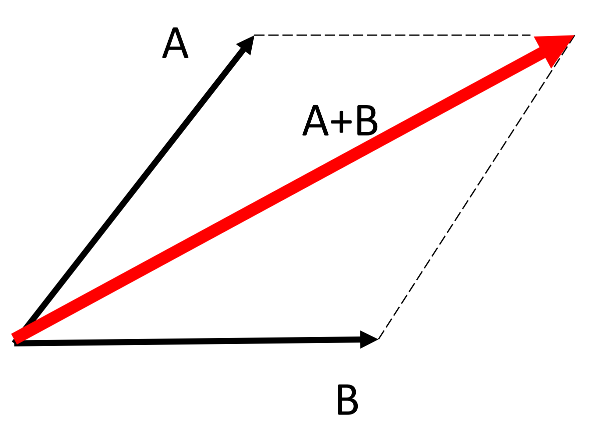
- versor $\hat{a}$: igual sentido y direccion al vector $\vec{a}$, modulo $= 1$
- un versor define una direccion $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- cualquier vector puede expresarse $\vec{a} = |\vec{a}|\hat{a}$

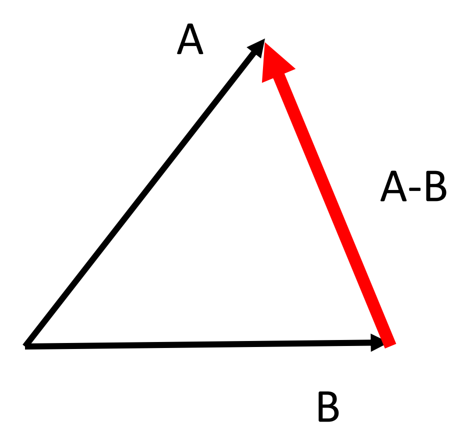
C. Versores Cartesianos

- $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$
- $\hat{x} = (1, 0, 0), \hat{y} = (0, 1, 0), \hat{z} = (0, 0, 1)$
- $\vec{A} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$
- $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$

D. Suma de Vectores (Regla del paralelogramo)

- Conmutatividad $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Asociatividad $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

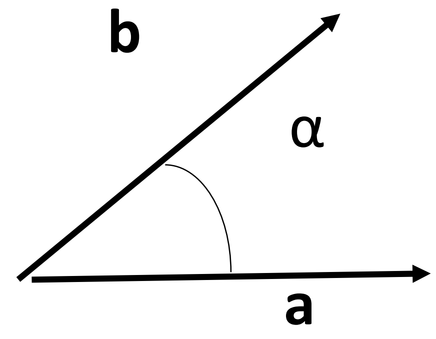




E. Productor escalar (.)

Producto escalar $\vec{a}.\vec{b}$ da como resultado un numero real
Propiedades:

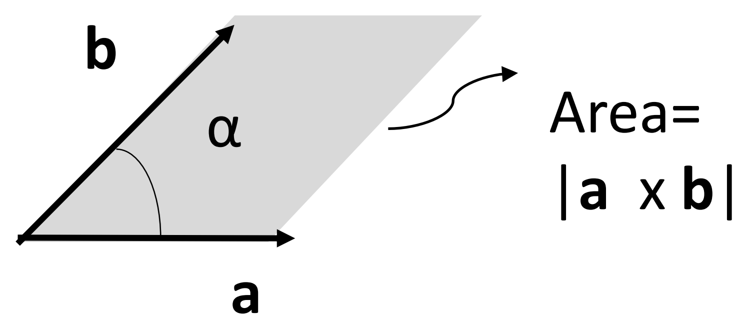
- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\alpha)$
- $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|.|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$
- si $\vec{a} \perp \vec{b}$ entonces $\alpha = \pi/2$ y $\vec{a}.\vec{b} = 0$



F. Productor vectorial (x)

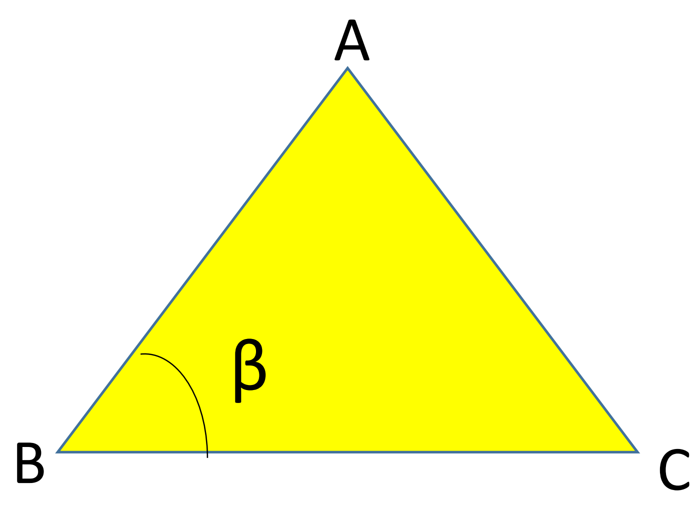
Producto vectorial ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$) da como resultado un vector ($\vec{c}$) ortogonal al plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$
Modulo $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha)$ es igual al area del paralelogramo (ver grafico) Propiedades

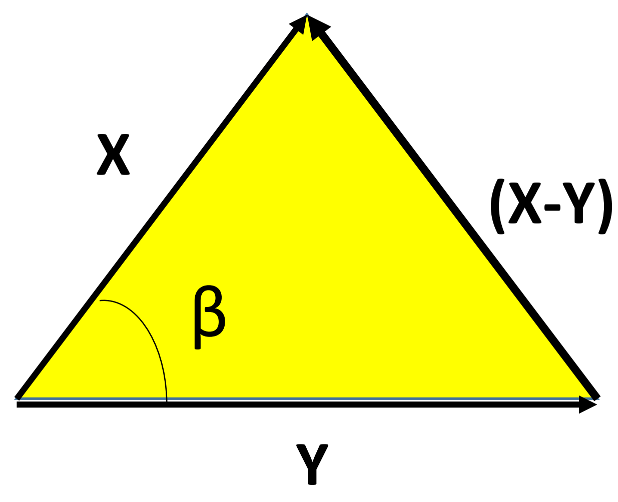
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (regla de mano derecha)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- si $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ entonces $\vec{a} = 0$ o $\vec{b} = 0$ o $\vec{a}$ paralelo $\vec{b}$



G. Teorema del Coseno (Ej. (6))

Demostrar que $|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2|\vec{AB}||\vec{BC}|\cos(\beta)$
Llamemos $\vec{AB} = \vec{x}$ y $\vec{BC} = \vec{y}$, entonces tenemos $\vec{AC} = (\vec{x} - \vec{y})$

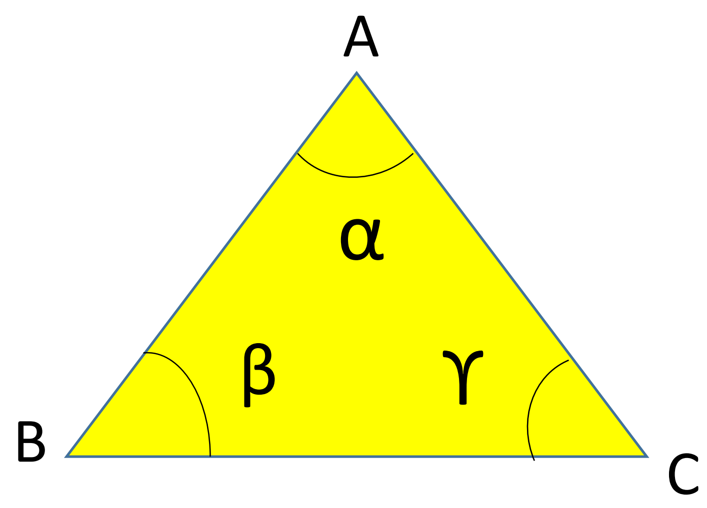




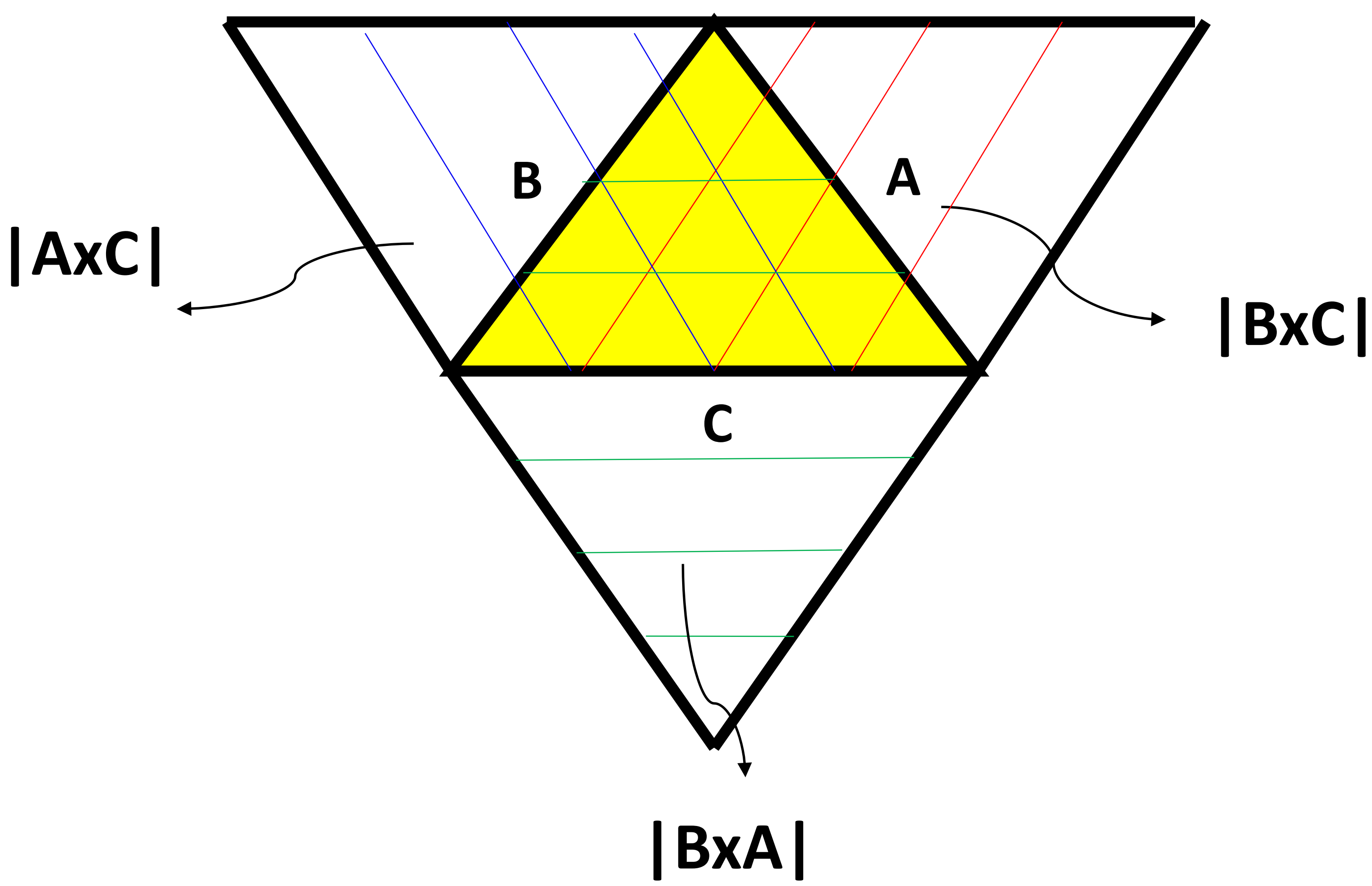
$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}).(\vec{x} - \vec{y})}$
$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\vec{x}.\vec{x} - 2\vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y}}$
$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\beta)$

H. Teorema del Seno (Ej. (6))

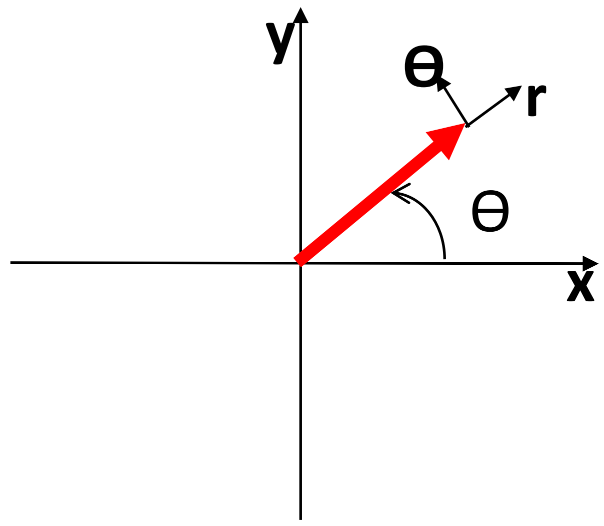
Demostrar que $\frac{AC}{\sin(\beta)} = \frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{BC}{\sin(\alpha)}$ (ver grafico)



Dado que el area del paralelogramo es igual al doble del area del triangulo tenemos
Tenemos que las areas son equivalentes $|\vec{B} \times \vec{A}| = |\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{C} \times \vec{B}|$
Si dividimos por $|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|$ obteniendo: $\frac{|\vec{B}||\vec{A}|\sin(\alpha)}{|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|} = \frac{|\vec{A}||\vec{C}|\sin(\gamma)}{|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|} = \frac{|\vec{C}||\vec{B}|\sin(\beta)}{|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|}$
simplificando resulta $\frac{\sin(\alpha)}{|\vec{C}|} = \frac{\sin(\gamma)}{|\vec{B}|} = \frac{\sin(\beta)}{|\vec{A}|}$
invertimos cada termino con lo cual queda demostrado el teorema del seno.



IV. COORDENADAS POLARES (r, θ)



Mientras que el sistema de ejes cartesianos $(\hat{x}, \hat{y})$ esta fijo, el sistema de ejes polares $(\hat{r}, \hat{\theta})$ rota con velocidad angular $\dot{\theta}$
Si escribimos los ejes polares en termino de los ejes cartesianos:

- $\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$
- $\hat{\theta} = \sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}$

Podemos encontrar las derivadas temporales de los versores polares de la forma:

- $\dot{\hat{r}} = -\sin(\theta)\dot{\theta}\hat{x} + \cos(\theta)\dot{\theta}\hat{y} = \dot{\theta}\hat{\theta}$
- $\dot{\hat{\theta}} = -\cos(\theta)\dot{\theta}\hat{x} - \sin(\theta)\dot{\theta}\hat{y} = -\dot{\theta}\hat{r}$

Dado un vector posicion en coordenadas polares $\vec{r} = r\hat{r}$
Podemos hallar la derivada temporal de la posicion, obteniendo la velocidad $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$
Obtenemos $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
A su vez la derivada temporal de la velocidad nos da la aceleracion $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$