Física 1 (Q): Laboratorios

1er cuatrimestre 2020
JTP: Laura Ribba, Diego Shalom, Marcelo Luda
Ay 1ra: Griselda Mingolla, Santiago Estevez Areco

Práctica 3: Regresión lineal

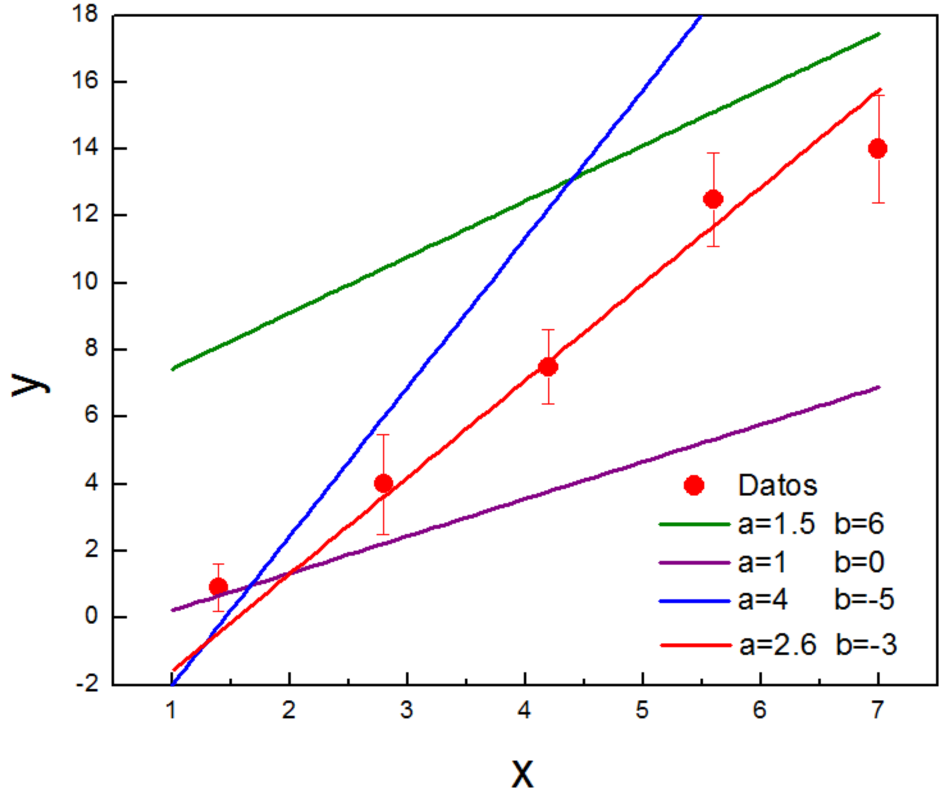
Repasemos…

- Definimos un sistema físico a partir de parámetros y variables.

  Medimos de manera sistemática
- Expresamos resultados como un intervalo → $x = (x_0 \mp \Delta x)$
- Utilizamos herramientas e indicadores estadísticos
- ${e_{tot}}^2 = {e_{est}}^2 + {e_{ins}}^2$
- Mediciones indirectas → $y = f(x_i)$
- Propagación de errores: $\Delta y^2 = \sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2$

Regresión Lineal

- Herramienta que permite contrastar datos **experimentales** (x_i, y_i) con un **modelo** teórico lineal



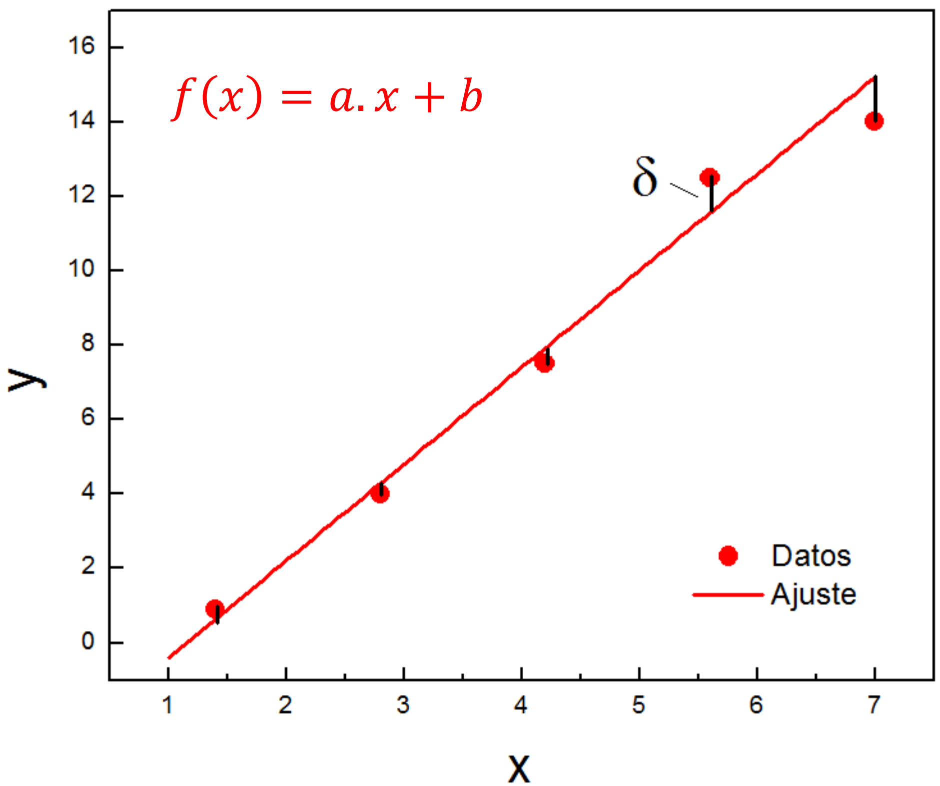
$$(x_i, y_i)$$

$$f(x) = a.x + b$$

Nos interesa la recta (función lineal) que más «se acerca» a mis datos

Regresión Lineal

- Se busca la función que minimice la suma de las distancias al cuadrado entre la predicción y los datos experimentales



$$S^2 = \sum_{i}^{N} {\delta_i}^2 = \sum_{i}^{N} [y_i - f(x_i)]^2$$

$$S^2 = \sum_{i}^{N} [y_i - (a.x_i + b)\ ]^2$$

$$Incógnitas = a, b$$

ALGORITMO (SIN ERROR EN Y)

- ¿Cómo cálculo a y b en el ajuste?

$$\frac{\partial S^2(a,b)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S^2(a,b)}{\partial b} = 0$$

...

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{N\sum(x_i\, y_i) - (\sum x_i).(\sum y_i)}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{(\sum x_i{}^2)\,.\,(\sum y_i) - (\sum x_i).(\sum x_i y_i)}{N\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}}$$

OTRO ALGORITMO (CON ERROR EN Y)

- ¿Qué pasa con el error de los datos en el ajuste?

$$S^2 = \sum_i^N \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_{yi}}\right]^2 = \sum_i^N \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{{\sigma_{yi}}^2}$$

…

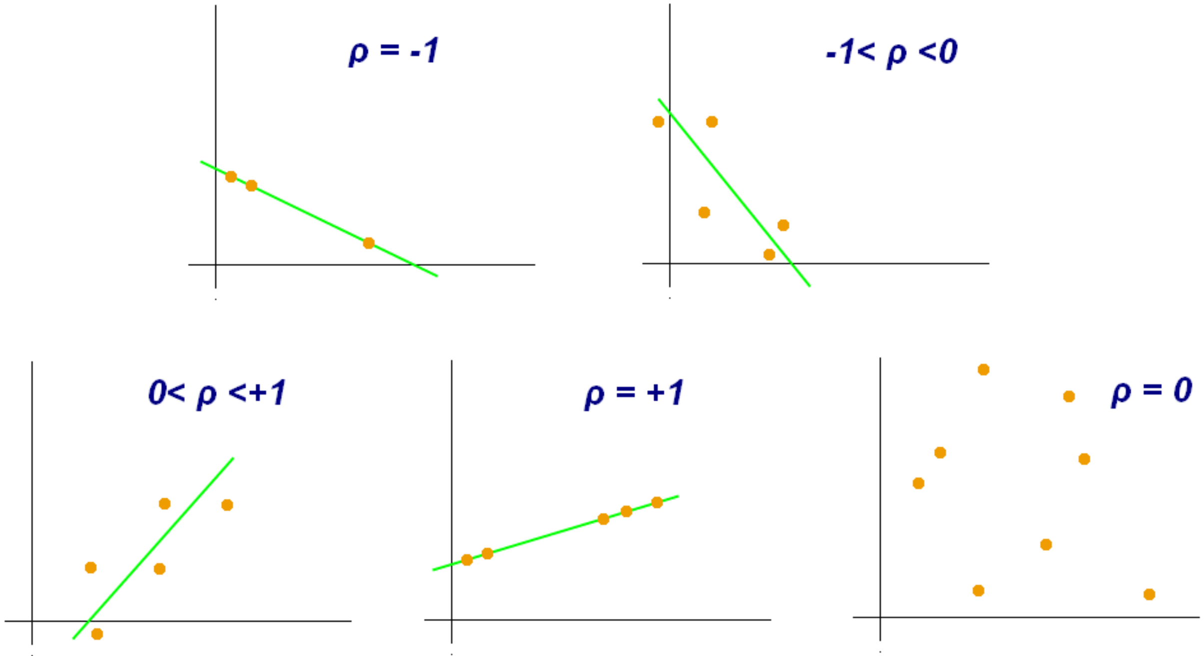
$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{\Delta}\left|\sum \dfrac{1}{{\sigma_{yi}}^2} \sum \dfrac{x_i y_i}{{\sigma_{yi}}^2} - \sum \dfrac{x_i}{{\sigma_{yi}}^2} \sum \dfrac{y_i}{{\sigma_{yi}}^2}\right| \\ b = \dfrac{1}{\Delta}\left|\sum \dfrac{{x_i}^2}{{\sigma_{yi}}^2} \sum \dfrac{y_i}{{\sigma_{yi}}^2} - \sum \dfrac{x_i}{{\sigma_{yi}}^2} \sum \dfrac{x_i y_i}{{\sigma_{yi}}^2}\right| \\ \Delta = \sum \dfrac{1}{{\sigma_{yi}}^2} \sum \dfrac{{x_i}^2}{{\sigma_{yi}}^2} - \left(\sum \dfrac{x_i}{{\sigma_{yi}}^2}\right)^2 \end{cases}$$

Solo considera errores en Y. Debemos comprobar: $\dfrac{\Delta x}{\bar{x}} \ll \dfrac{\Delta y}{\bar{y}}$

Si $^{\Delta x}/_{\bar{x}} \gg {}^{\Delta y}/_{\bar{y}}$ **debemos invertir los ejes y calcular** $\boldsymbol{f^{-1}(y)}$

Validez de un ajuste

- Coeficiente de correlación de Pearson ρ:
  - Mide el grado de correlación lineal entre dos variables
  - $-1 < \rho < 1$
  - $\rho = |1|$ indica que los datos están perfectamente alineados
  - $\rho = 0$ indica que no hay correlación lineal entre las variables



Validez de un ajuste

- Coeficiente de determinación R^2 (r-squared)
  - Proporción de la varianza que puede explicar el modelo
  - En regresión lineal es el cuadrado del coeficiente de Pearson
  - $0 < R^2 < 1$
  - Mientras más cercano a 1 mejor es el ajuste

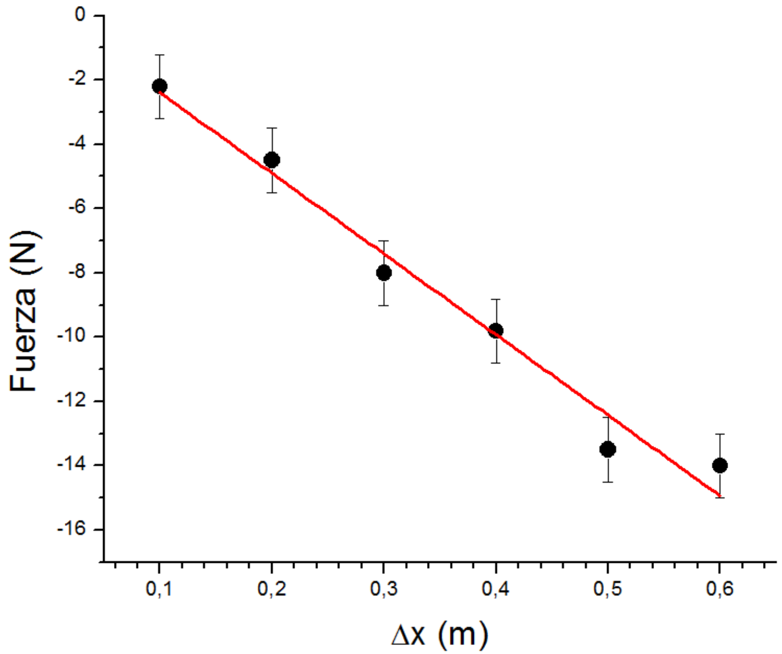
$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - f(x_i))^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

EJEMPLO:

- En un resorte ideal, la relación entre la fuerza y el estiramiento se modela por la ley de Hooke:

$$\boxed{\mathrm{F} = -k\,\Delta x}$$

k: constante del resorte



$$f(x) = a.x + b$$

Resultados del ajuste:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -25.09 \mp 1.92 \\ b = 0.113 \mp 0.749 \\ r^2 = 0.977 \end{array} \right.$$

$$a = -k \;\rightarrow\; k = (25 \mp 2)\ {}^{N}/_{m}$$

$$b = ??$$

- Pregunta 1: ¿Qué significado le dan a la ordenada al origen?

¿Y SI EL MODELO NO ES LINEAL?

- Muchas veces puede linealizarse la ecuación:

- $y = a.x^3$ → Se grafica $y\ vs\ x^3$

$$\Delta(x_i{}^3) = \sqrt{(\frac{\partial(x^3)}{\partial x}\Delta x_i)^2}$$

- $y = a.b^x$

$$\ln(y) = \ln(a.b^x)$$

$$\ln(y) = \ln(a) + x.\,ln(b)$$

→ Se grafica $\ln(\mathrm{y})\ vs\ x$

- $y(x) = a.x^b$

$$\ln(y) = \ln\left(a.x^b\right)$$

$$\ln(y) = \ln(a) + b.\ln(x)$$

→ Se grafica $\ln(\mathrm{y})\ vs\ \ln(x)$

LINEALIZAR ECUACIONES: EJEMPLO

- **Ley de Beer-Lambert:**
  - Relaciona la atenuación de la luz con la concentración de determinada especie química

$$T(c) = 10^{-\varepsilon l c}$$

T es la transmitancia (se mide), l la longitud atravesada por el haz de luz, ε es la absortividad de la especie y c es la concentración de la especie

$$log_{10}(T) = log_{10}\left(10^{-\varepsilon l c}\right)$$

$$log_{10}(T) = -\varepsilon l c$$

Se grafica $log_{10}(\mathrm{T})\ vs\ \mathrm{c}$

Antes de hacer el ajuste, debemos propagar el error de las variables!

$$\Delta(log_{10}T)^2 = \left(\frac{\partial(log_{10}T)}{\partial T}\Delta T\right)^2 = \ ...$$

- La pendiente es igual a $-\varepsilon l$
- Podemos medir l y despejar ε

PREGUNTA 2:

- ¿Cómo linealizas la siguiente ecuación?

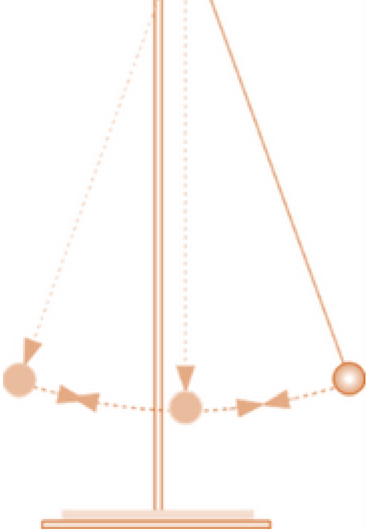
  - Ley de enfriamiento de Newton:

$$T(t) = T_{amb} + (T_i - T_{amb})e^{-kt}$$

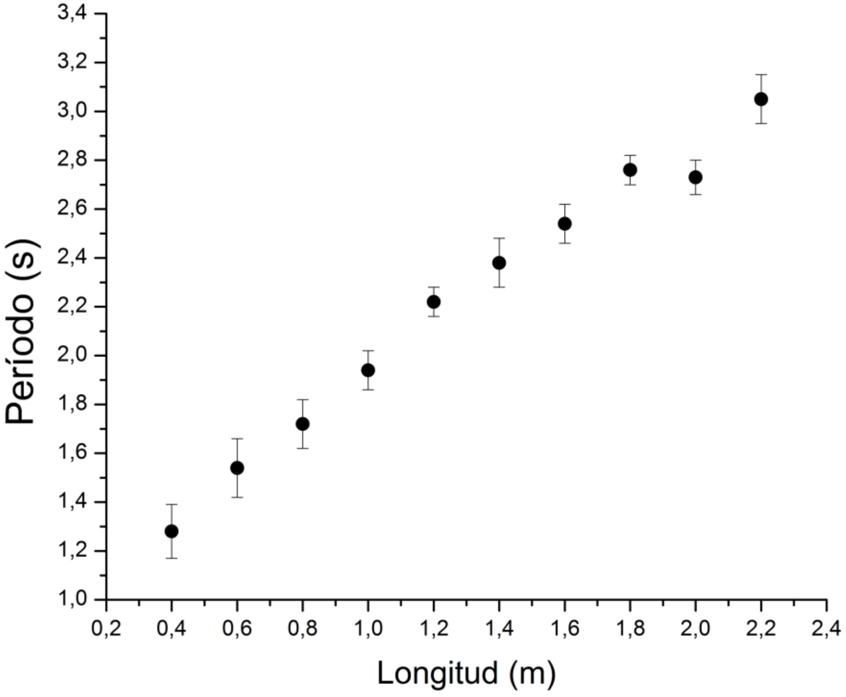
Donde T_{amb} es la temperatura ambiente y T_i es la temperatura inicial del objeto.

- ¿Cómo es el error de las nuevas variables?

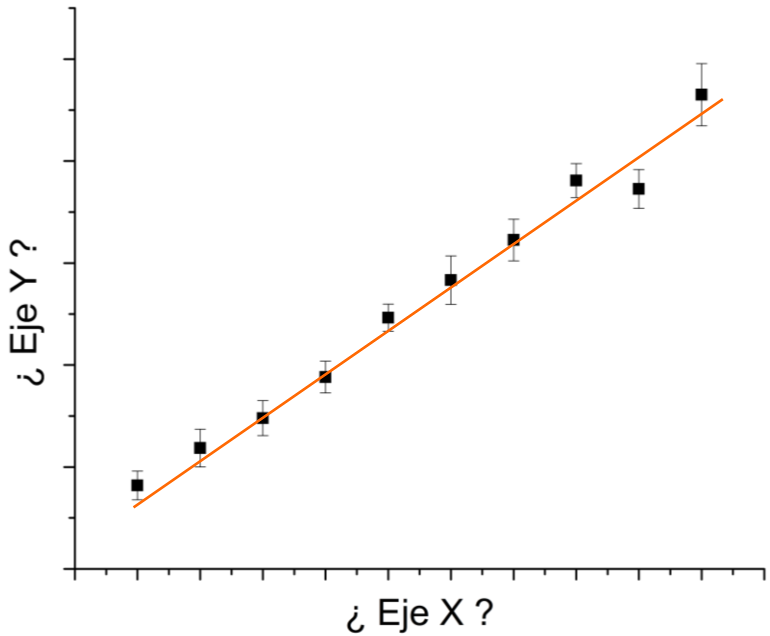
PRÁCTICA 3 (PARTE 1)



- Péndulo ideal como caso de estudio
- Medir el período para distintas longitudes (10)
- Utilizar metodología de práctica anterior (10 mediciones de 10 períodos por cada L)
- ¡Graficar con barras de error!



Práctica 3 (parte 2)



- Linealizar los datos (2 formas)
- Propagar el error
- Ajustar por cuadrados mínimos
- Calcular g
- Reportar datos
- [Aquí está la Guía]
- Fecha de entrega: Jueves 14/5