Guía 2: Mediciones Indirectas
Estimación de la constante de gravedad (g).

Laboratorio de Física 1 para Químicos
Dept. Física, FCEyN, UBA.

Modalidad virtual

1. Introducción:

Esta guía sugiere algunas actividades para familiarizarse con la medición y el análisis estadístico de magnitudes aleatorias. En principio se podría decir que una magnitud es aleatoria si al reproducir muchas veces la medición de una misma magnitud arroja resultados distintos. Dependiendo del método utilizado en el experimento, el observador también puede ser parte del proceso de medición. La interacción del observador con el experimento puede afectar el resultado de la medición. En particular, en algunos experimentos, el resultado puede ser sensible al tiempo de reacción del observador (el intervalo transcurrido entre la percepción de un estímulo y la acción motora).

Por otro lado, cuando se desea obtener una magnitud física, no siempre se cuenta con un instrumento para medirla en forma DIRECTA. Frecuentemente, la magnitud deseada se deriva de algunas otras magnitudes que fueron obtenidas en forma directa. Esto se logra a través de alguna relación funcional entre las magnitudes, y se dice que la medición fue INDIRECTA. Por ejemplo, podemos medir la distancia recorrida por un móvil y el tiempo transcurrido de forma directa (con metro y cronómetro), pero para saber la velocidad debemos estimarla de forma indirecta.

La elección del experimento es un punto crítico a la hora de obtener una magnitud. Para ello, resulta de suma importancia la decisión de los instrumentos a utilizar, así como el método elegido (siempre hay que pensar que se debe tener en cuenta la validez de las hipótesis del método utilizado).

Por ejemplo, si queremos obtener la superficie de un cuerpo cuya forma se aproxima a alguna forma geométrica conocida (círculo, cuadrado, etc), se podría medir directamente las longitudes (diámetros, lados, etc.) y luego realizar la cuenta adecuada para obtener la magnitud deseada. ¿Pero son realmente esas superficies círculos o cuadrados perfectos?

Cuando medimos una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un conjunto de valores que llamamos INTERVALOS DE CONFIANZA relacionados a la INCERTEZA de la medición. Por ejemplo, si medimos en forma directa la magnitud x, dado $x = x_0 \pm \Delta x$ (donde: x_0 es el valor medio y Δx el error absoluto), podemos decir que un dado valor de la magnitud medida se encuentra en el intervalo $(x_0 - \Delta x,\, x_0 + \Delta x)$ con cierta probabilidad, que depende de como hayamos calculado el error absoluto.

Al expresar una magnitud que fue obtenida en forma indirecta, también lo haremos en la forma: $W = W_0 \pm \Delta W$. Pero, ¿Cómo se obtienen estos parámetros? Las incertezas de las mediciones directas deberían influir o propagarse sobre el resultado de la medición indirecta. ¿La incerteza de la medición indirecta depende sólo de las incertezas de las mediciones directas o también de la relación entre ellas?

Supongamos que se puede obtener en forma indirecta la magnitud W midiendo en forma directa las magnitudes x, y, z,... (independientes entre sí), mediante una función $f(x, y, z, ...)$, tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

A partir de las mediciones directas, conocemos los valores: $x = x_0 \pm \Delta x$; $y = y_0 \pm \Delta y$; $z = z_0 \pm \Delta z$;....

Entonces, se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W = W_0 \pm \Delta W$ siendo:

$$W_0 = f(x_o, y_o, z_o, ...) \tag{1}$$

$$\Delta W = \sqrt{\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0,...)} \cdot \Delta x\right]^2 + \left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0,...)} \cdot \Delta y\right]^2 + \left[\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0,...)} \cdot \Delta z\right]^2} \tag{2}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada parcial de f con respecto a x, evaluada en los valores medios: x_0, y_0, $z_0, ...$; que se obtiene considerando a x como la única variable, mientras que al resto $y, z, ...$ se las considera constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial, se evalúa dicha expresión en x_0, y_0, $z_0, ...$ De la misma forma, es la derivada parcial de f con respecto a la variable y, considerando al resto $(x, z, ...)$ constantes. La expresión (2) se conoce como **fórmula de propagación de errores**. Es válida siempre que los parámetros $x, y, z, ...$ sean independientes (independencia significa que conocer la incerteza de la magnitud x no provee ninguna información acerca de la incerteza de las otras magnitudes). La expresión (2) es una fórmula aproximada para ΔW, que es válida cuando las derivadas parciales de f de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación). Pueden seguir un ejemplo en el apéndice.

Por otro lado, si medimos una misma magnitud física utilizando diferentes métodos, ¿obtendremos resultados diferentes? ¿Cómo podemos determinar si dos resultados son distintos?

Mediante experimentos simples, en esta práctica aprenderemos las herramientas necesarias para obtener la incerteza de una medición indirecta a partir de mediciones directas de magnitudes independientes y para comparar resultados de una misma magnitud procedentes de experimentos diferentes.

Los objetivos del presente TP son, a partir de una serie de mediciones,

- Estimar la magnitud y la incerteza estadística del fenómeno estudiado.
- Comprender y comparar distintos métodos para estimar estos valores, y cómo estos varían con el número de observaciones.
- Estudiar el tratamiento de las incertezas de magnitudes que se obtienen en forma indirecta.
- Discutir los conceptos de precisión, exactitud y confianza.

2. Experiencia

El período de un péndulo simple puede expresarse como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3}$$

donde T es el período, g es la aceleración de la gravedad y L es la longitud del hilo. Note que el período es independiente de la amplitud de la oscilación. El objetivo de esta práctica es obtener experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad g. Para esto vamos a utilizar los valores medidos del período $T = T_0 \pm \Delta T$ y del largo del hilo $L = L_0 \pm \Delta L$. Para deducir la expresión 3 se aplican las leyes de Newton, suponiendo una serie de características del sistema idealizado: masa puntual, hilo inextensible y de masa nula, colgado de un punto fijo, oscilaciones pequeñas. Por lo tanto, para que el modelo simplificado tenga validez, debemos tener en cuenta estas características al construir y utilizar nuestro péndulo. ¿Se cumplen estos supuestos en tu experimento? ¿Cómo influirá esto en la incerteza de las mediciones?

Un caso interesante de propagación de errores se da cuando medimos magnitudes periódicas. En lugar de medir el tiempo de un único período T, podemos medir el tiempo de N períodos T_N sucesivos. De esta manera, cuando calculamos el período de una oscilación ($T = T_N/N$), la incerteza asociada a la medición del período se reduce de manera correspondiente. Proponemos entonces determinar el valor de g en las siguientes condiciones:

1. A partir de 100 mediciones individuales del período.
2. A partir de 10 mediciones de 10 períodos.
3. A partir de 1 medición de 100 períodos (si tu péndulo se frena antes, contá todas las que puedas).

¿Qué incertezas asignarás a cada medición? Comparen los resultados obtenidos del período ¿Qué ocurre con las incertezas? Comparen los valores de g calculados con cada método con el valor aceptado de g. ¿Se solapan? ¿Qué podés decir de los distintos métodos?

Al analizar y presentar los datos es importante tener presente las siguientes preguntas:

- Comparen el resultado con los otros grupos ¿Todos obtuvieron el mismo valor? ¿Las diferencias entre los valores de los distintos grupos fueron significativas?
- ¿Los resultados son distinguibles del resultado esperado? ¿Los resultados esperados tienen incerteza?
- ¿Qué grupo obtuvo el resultado el resultado más preciso? ¿Y el más más exacto? ¿Por qué?
- En el cálculo está involucrado π ¿Este tiene una incerteza asociada? Si es así, ¿Cómo la consideraría? ¿O la despreciaría? ¿Por qué?

Trabajo a entregar

- Volcar los resultados en [**ESTA PLANILLA**], en una fila para cada una de las condiciones utilizadas.
- Presentar un pequeño informe (no más de 2 carillas de texto) incluyendo:
  - Detalles de la construcción del péndulo (puede mirar el ejemplo de la descripción experimental entre los archivos disponibles de esta práctica).
  - Los resultados de las mediciones por cada método (T, L, g con sus incertezas).
  - Comparación de los resultados obtenidos con el valor aceptado de g (busque el valor, y no olvide reportar la fuente en donde la encontró). En particular evaluar si los valores de g difieren o son "el mismo". Justifique.

A. Determinación del error en la superficie

Supongamos que se quiere medir el área A de una mesa rectangular de lados W y H. Tanto W como H fueron medidas directamente utilizando una cinta métrica, resultando: $W = W_0 \pm \Delta W$ y $H = H_0 \pm \Delta H$. El resultado de la medición indirecta de esta magnitud A será: $A = A_0 \pm \Delta A$. El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$A_0 = W_0 \cdot H_0. \tag{4}$$

Y su incerteza,

$$\Delta A = \sqrt{\left[\left.\frac{\partial A}{\partial W}\right|_{(W_0,H_0)} \cdot \Delta W\right]^2 + \left[\left.\frac{\partial A}{\partial H}\right|_{(W_0,H_0)} \cdot \Delta H\right]^2} \tag{5}$$

donde $\left.\frac{\partial A}{\partial W}\right|_{(W_0,H_0)} = H_0$ y $\left.\frac{\partial A}{\partial H}\right|_{(W_0,H_0)} = W_0$. Entonces obtenemos,

$$\Delta A = \sqrt{[H_0 \cdot \Delta W]^2 + [W_0 \cdot \Delta H]^2} \tag{6}$$