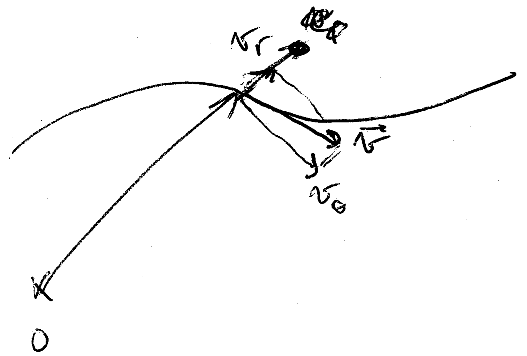
# Clase 10

## Impulso angular:

Vamos a introducir un concepto similar al de cant. de mov. pero q' tiene especial relevancia cuando tenemos un mov. q' no es 1D




Uno puede pensar al mov. como la combinac. de 2 mov. Uno radial ($v_r$) y otro circular alr. de O ($v_\theta$)

⇒ el $\vec{p}$ se puede escribir como $\vec{p} = \underbrace{m\vec{v}_\theta}_{\vec{p}_\theta} + \underbrace{m\vec{v}_r}_{\vec{p}_r}$

(Recordar prod. vectorial)

Si uno define la cant. $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\vec{p}_r + \vec{p}_\theta) =$

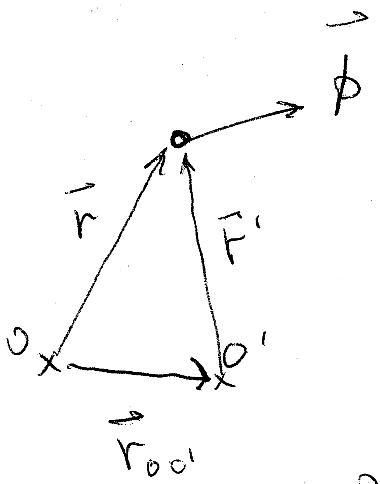
$= \underbrace{\cancel{\vec{r} \times \vec{p}_r}}_{\parallel} + \vec{r} \times \vec{p}_\theta$ → queda naturalm. separada la parte angular

→ **Impulso angular** (momento angular)

Notar q' $\vec{L}$ depende de "O" → centro de momentos

⇒ $\vec{L}_0$

Sup. 2 punto O y O', veamos cómo cambia $\vec{L}_{O'}$ resp. de $\vec{L}_O$:




$$\vec{L}_O = \vec r \times \vec p = \left(\vec r_{OO'} + \vec r'\right) \times \vec p =$$

$$= \vec r_{OO'} \times \vec p + \vec r' \times \vec p$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec L_O = \vec L_{O'} + \vec r_{OO'} \times \vec p}$$

Esto q' O y O' no tienen x q' ser el origen de un sist. coord.

¿Qué importancia tiene $\vec L$?

Así como $\vec p$, $\vec L$ puede ser constante de mov. en ciertas condiciones. Veamos cuáles son.

- Tengo un objeto con imp. ang. $\vec L_O = \vec r \times \vec p$

$$\frac{d\vec L_O}{dt} = \dot{\vec r} \times \vec p + \vec r \times \dot{\vec p} = \cancelto{0}{\vec v \times \vec p} + \vec r \times \underbrace{\vec F}_{\text{resultante}}$$

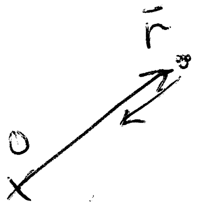
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec L_O}{dt} = \vec r \times \vec F}$$

es el momento de las fuerzas o __torque__

$\vec M_O^{ext}$ = momento de las F ext, también dep. de O

⇒ p/que $\vec{L}_o = cte$ ; $\vec{M}_o^{ext} = 0$

y eso se da si : $\vec{F} \parallel \vec{r} \longrightarrow$ Fuerzas centrales




Casos → MR

→ MCU

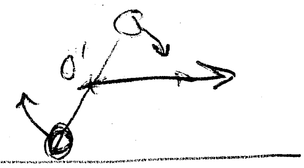
En el mov. rectilíneo siempre se conserva $\vec{p}$ pues las $\vec{F}$ sólo actúan en la dir. de mov (o las otras se anulan).

Pero $\vec{L}_o$ juega un rol similar ~~al de p~~ en el MC al de $\vec{p}$ en el rectilíneo.

El $\vec{L}$ puede calcularse respecto de un punto O' en mov. resp. de O. En ese caso:

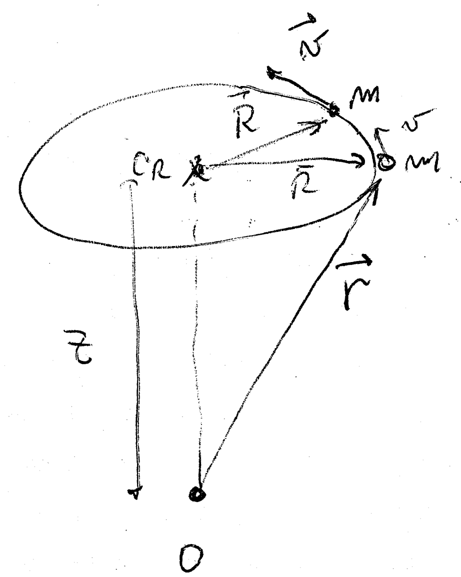
$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O - \vec{r}_{OO'} \times \vec{p}$$ y al derivar queda:

x ej traslación + rot




$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{M}_{O'}^{EXT} - \vec{v}_{O'} \times \vec{p}}$$

EJ: PART. CON MC

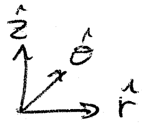



$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$

USAMOS POLARES EN EL PLANO

Y AGREGAMOS $\hat{z}$ P/ALTURA

→ COORD. CILÍNDRICAS




ELEGIMOS UNO Q' NO ES EL CR

$\vec{r} = R\,\hat{r} + z\,\hat{z}$

RECORDAR Q' $v = \omega R$

$\vec{p} = m\,v\,\hat{\theta} = m\,\omega R\,\hat{\theta}$

$\Rightarrow \vec{L}_O = \left(R\,\hat{r} + z\,\hat{z}\right) \times m\,v\,\hat{\theta}$

REGLAS PROD. ESCALAR : 1° RESUELVO EL PROD. DE LOS MÓDULOS

2° P/SACAR LA DIREC. USO

$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$, $\hat{\theta} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

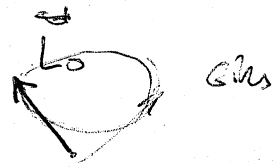
(INVERTIDOS → (−))

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = m R^2 \omega\,\hat{z} - m\,\omega R z\,\hat{r}}$$

Para saber si es cte uno tiene que usar $\vec{M}_o^{ext}$

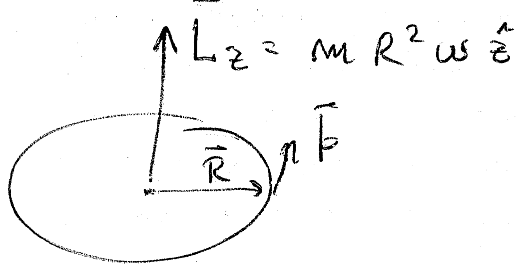
→ Si hay MC ⇒ $\vec{F}^{ext}$ apunta a CR ⇒ $\vec{M}_o^{ext} \neq 0$

⇒ $\vec{L}_o$ no es constante




Sin embargo, si $\omega$ = cte (MCU), la comp. $\hat{z}$ de $\vec{L}_o$ es constante. La $\hat{r}$ no porq' $\hat{F}$ cambia con la posición.

Esa conservación tiene que ver con las $\vec{F}$ q' provocan el MC.




el prod. vectorial de 2 v. ⊥ es ⊥ a ambos.

En un giro ~~horario~~ antihorario $L_z > 0$ (y viceversa)

¿Qué pasa con $\vec{L}_{CR}$?

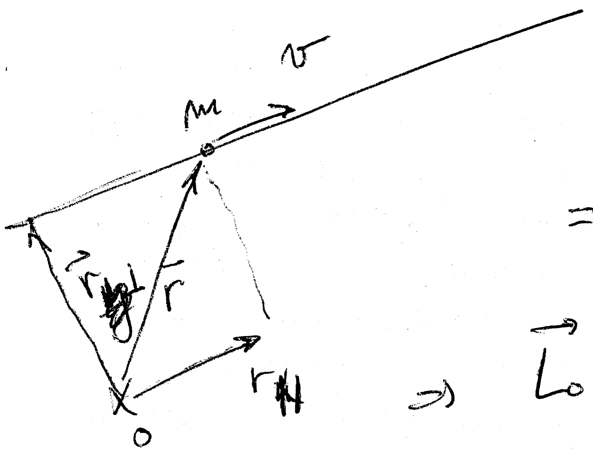
Para ese punto $z = 0$ ⇒ $\boxed{\vec{L}_{CR} = mR^2\omega\hat{z}}$

Respecto al centro de rot. $\vec{L}_{CR}$ es cte y eso es obvio pues p/q' haya un MCU las F tienen q' ser constantes.

Así como $\vec{p} = cte$ implica que un objeto mantiene su MRU, $\vec{L}_O = cte$ implica q' un obj. mantiene un MCU alr. del punto O.

Decimos q' ~~p~~ la cons. de $\vec{p}$ indica simetría de traslación y la de $\vec{L}_O$ indica simetría de rotación (alr de un eje $\parallel$ a $\vec{L}_O$).

<u>Part. en MRU</u>




$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} =$$

$$= m\left(\vec{r}_\perp \times \vec{v} + \cancel{\vec{r}_\parallel \times \vec{v}}\right) \quad \text{son } \parallel$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = m\,\vec{r}_\perp \times \vec{v}$$

si $\vec{v} = cte$ (MRU) $\Rightarrow \vec{L}_O = cte$ ✓

$\downarrow$

$\vec{F}^{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{M}_O^{EXT} = 0$

¿Qué pasa si "O" está sobre la recta?

$\vec{L}_O = 0$ (no hay $\vec{r}_\perp$)

y es cte aunq' $\vec{v}$ no lo sea.

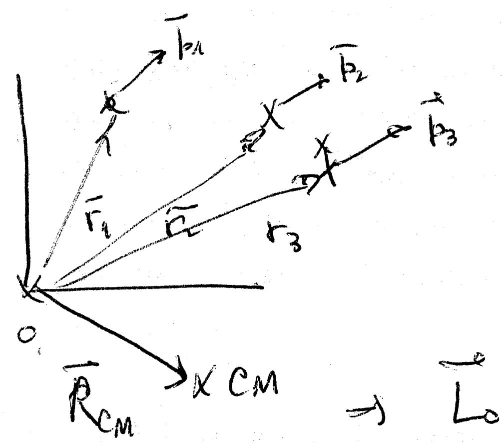
---

¿Cuál es el eje de simetría en ese caso?

## Consecuencias de la cons. de $\vec{L}$

1º) Como $\vec{L}_O = \vec{r}\times\vec{p}$ $\Rightarrow$ $\vec{L}_O$ es $\perp$ a $\vec{r}$ y $\vec{p}$ simultáneamente. Si $\vec{r}$ y $\vec{p}$ no están alineados $\Rightarrow$ definen un plano y si $\vec{L}_O$ se conserva, ese plano es siempre el mismo y es $\perp$ a $\vec{L}$ $\Rightarrow$ el mov. ocurre en un plano.

## Impulso angular de un sist. de part.




$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Luego $\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm} + \vec{R}_{cm}$

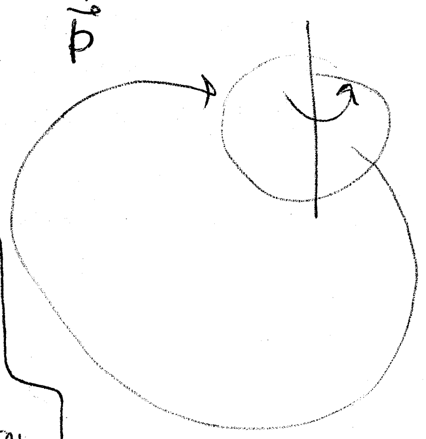
$$\Rightarrow \vec{L}_O = \sum(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})\times\vec{p}_i + \sum\vec{R}_{cm}\times\vec{p}_i$$

$\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$ es $\vec{r}_i{}' \equiv$ posic. de la part. "i" resp. del CM

y como $R_{CM}$ no dep. de "i", sale de la suma.

$$\Rightarrow \vec{L}_O = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times \vec{p}_i}_{\vec{L}\ \text{tomando al CM como centro de momentos}} + \vec{R}_{CM} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i}_{\vec{p}}$$

$\vec{L}_{CM}$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\text{spin}} + \underbrace{\vec{R}_{CM}\times\vec{p}}_{\text{orbital}}}$$

~~orbital~~