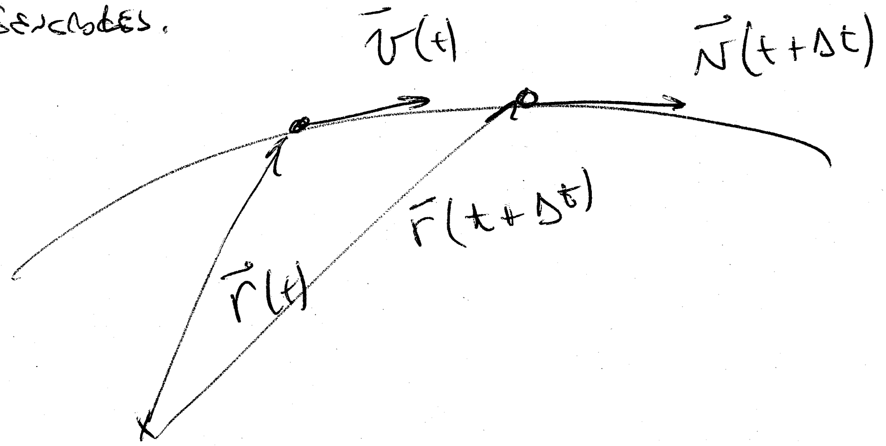
Clase 5: Mov. Circular

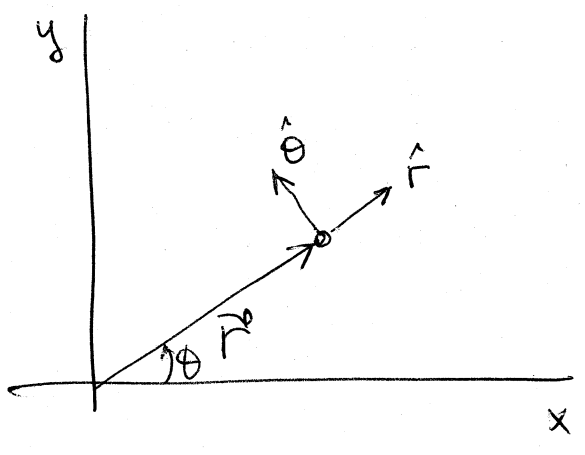
De lo visto hasta ahora, sabemos que cualquier cambio en $\vec{v}$ está asoc. con la $\exists$ de una $\vec{a}$.

Analizamos casos en los que $\vec{a}$ siempre apunta en = dirección y sentido, pero dado que $\vec{a}$ es un vector puede haber casos + generales.



El cambio de $\vec{v}$ puede ser en módulo y en dirección

Vamos a pasar a un ~~sistema~~ caso en el que el problema es relativamente simple, una trayectoria circular.



Para estos casos, las coord. cartesianas (x, y) resultan inadecuadas en ciertos problemas, por eso vamos a definir un sist. de coord. que acompaña al objeto en su mov. $\longrightarrow$ coord. polares.

Estas coord. son r y θ como se ven en el dibujo.

El versor $\hat{r}$ tiene la dirección del vector posición, $\hat{\theta}$ es $\perp$ (hay q' definir el sentido), pero notar q' si doy θ y r puedo def. cualquier punto en el plano.

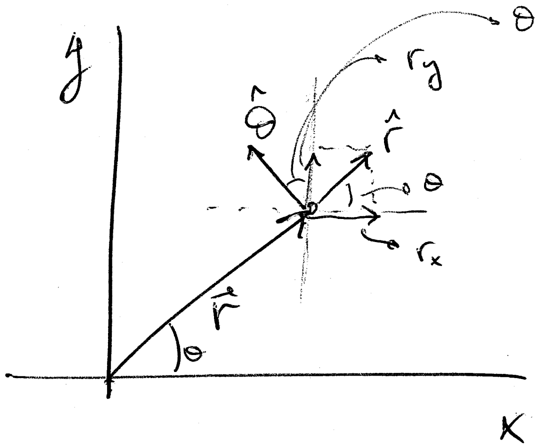
COORD. POLARES

$\hat{r}$ = direcc. de $\vec{r}$ y sent. saliente

$\hat{\theta}$ = $\perp$ a $\hat{r}$ y con sent. creciente antihorario

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{r} = r\,\hat{r}}$ (1) donde $|\vec{r}| = r$

Acuerdate con eso porque $\hat{r}$ varía con θ o sea q' la info. está completa ahí:



$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r} &= 1\cdot\cos\theta\,\hat{x} + 1\cdot\sin\theta\,\hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \end{aligned}} \quad (2)$$

El hecho de que los versores tengan una relación entre las coord. hace que al derivar uno tenga que aplicar regla de la cadena.

Por ej.: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ {sigue siendo así!, pero la derivada no es tan directa ($\hat{x}$ e $\hat{y}$ estaban fijos, pero $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ cambian → al derivar con tengo q' derivar)

no cambian

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right)$$

sí cambia

Paso $\frac{d(\,)}{dt} \equiv \dot{(\,)}$
A

ESTO ES LA DERIVADA DEL MÓDULO DE r

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{(r\,\hat{r})} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}} \quad ?$$

Veamos:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{(\cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{y})} = -\operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\theta}\,\hat{x} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y} =$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}) = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

y ya q' estamos:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{x} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y} = -\dot{\theta}\,\hat{r}$$

(3)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}} \quad (4)$$

¡ Aparece comp. $\hat{\theta}$!

$v_{radial} = \dot{r}$

$v_{tangencial} = r\dot{\theta}$

¿Cómo hallamos $\vec{a}$? → obviamente derivando $\vec{v}$ y usando $\dot{\hat{r}}$, $\dot{\hat{\theta}}$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{Ac. radial}}\hat{r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\text{Ac. tangencial}}\hat{\theta}}$$

Ac. radial: 2 términos, uno $(\ddot{r})$ sólo aparece si r varía

pero el otro $(r\dot{\theta}^2)$ veremos que aparece incluso cuando $r = cte$.

Ese término se denomina Aceleración centrípeta: $a_c = r\dot{\theta}^2$

y apunta al centro de giro.

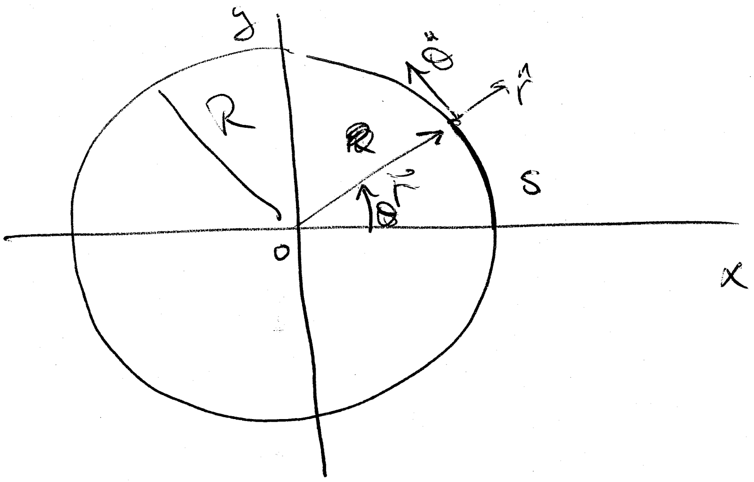
Caso práctico → Mov. circular

Trayectoria → circunferencia.

$\Rightarrow r = R = cte$

$\Rightarrow$ p/ la posición, alcanza con dar el ángulo y la ec. de mov. puede ser

$$\theta(t)$$



Unidades: $[\theta]$ ($\neq$ grados) = radianes $(360 = 2\pi)$ aunq' en el enunc. figuren ° → conv. a radianes.

Podemos def. una velocidad angular (en lugar de $\frac{m}{s} \rightarrow \frac{rad}{seg}$)

$$\omega(t) \equiv \dot{\theta} \longrightarrow [\omega] = \frac{rad}{seg}$$

; los rad. se suelen obviar y se coloca $\frac{1}{seg}$

De la misma forma se def. la aceleración angular:

$$\gamma(t) = \ddot{\theta} = \dot{\omega} \longrightarrow [\gamma] = \frac{1}{seg^2}$$

Una vuelta a la circunferencia son 2π radianes, entonces si $\omega = cte$ definimos el período como el tiempo en q' se da una vuelta (2π rad)

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad [T] = seg$$

Otra variable interesante es la frecuencia: f que considera la cant. de vueltas por unidad de tiempo, es parecido a ω,

pero notar q' ω se mide en rad./seg mientras que f se mide en vueltas/seg. Al igual que en ω, la unidad del num. no se coloca. Entonces p/diferenciar, cuando hablamos de $[f] = Hz$

aunq' tamb. es $\frac{1}{seg.}$ ← se sobreentiende (vueltas)

$\Rightarrow$ si $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rad/s), $\boxed{f = \frac{1}{T} \text{(vueltas)} \quad ó \quad f = \frac{\omega}{2\pi}}$

ejemplo → 1 vuelta / seg → 1 Hz (notar relac. inv. prop. entre f y T)

Cinemática angular:

Es totalmente análoga a la cinemática 1D (sólo que ahora habla del ángulo):

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \gamma (t - t_0)^2 \quad MC$$

$$\text{si} \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) \quad (\gamma = 0) \quad MCU$$

Volvamos a $\vec{v}$ y $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{=0}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = R\omega\,\hat{\theta} \longrightarrow \text{es siempre tangencial}$$

(circular)

$\Rightarrow$ se suele definir $\boxed{v_t = R\omega}$

En un MCU $v_t = cte = R\omega_0$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = (-r\dot{\theta}^2)\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} =$$

$\ddot{r} \to 0$, $\dot{r} \to 0$

$$= -R\omega^2\hat{r} + R\gamma\hat{\theta}$$

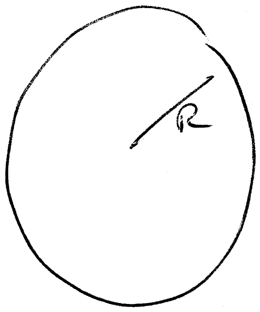
ó en un MCU → $\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\hat{r}}$ a_c apunta al centro de giro, es la aceleración centrípeta

También se escribe $\boxed{a_c = -\frac{v_t^2}{R}}$

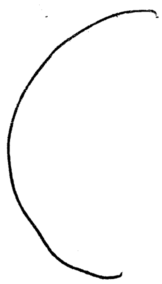
Aunque las coord. polares son más naturales, es sencillo volver a cartesianas recordando:

$$x(t) = R\cos\theta(t)$$
$$y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\theta(t)$$

Uno también puede querer saber distancias recorridas (en m) en lugar de ángulos. Esto es sencillo sobre un círculo:



→ long. $2\pi R$



→ long. πR

→ P/ cualq. áng θ en radianes $\boxed{R\theta = S}$ long. de arco

$\vec{F}$ en mov. circulares

Si un obj. realiza un mov. circular - tiene q' ∃ una $\vec{F}$

que provoque la a_c ⟶ F que actúa como F centrípeta

→ No es una nueva F., puede ser una $\vec{T}$ (hilo), gravitatoria (luna-tierra),

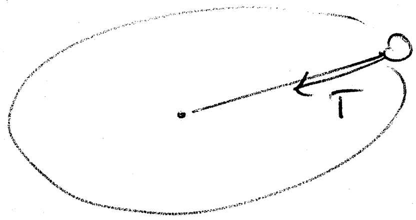
de contacto (vía), etc.

⇒ Cuando uno dice la F. centrípeta, no hay que agregar otra F, es

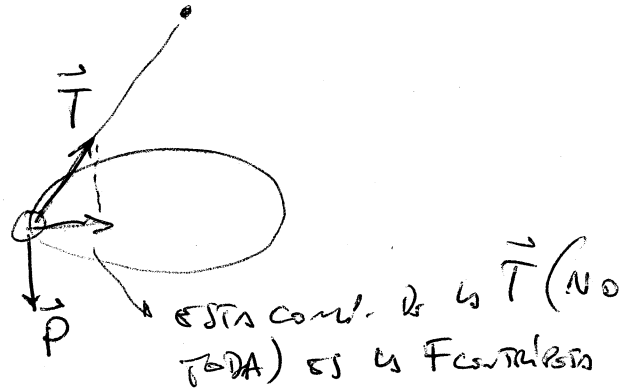
~~unas~~ la resultante de las F. que actúan sobre un obj y que

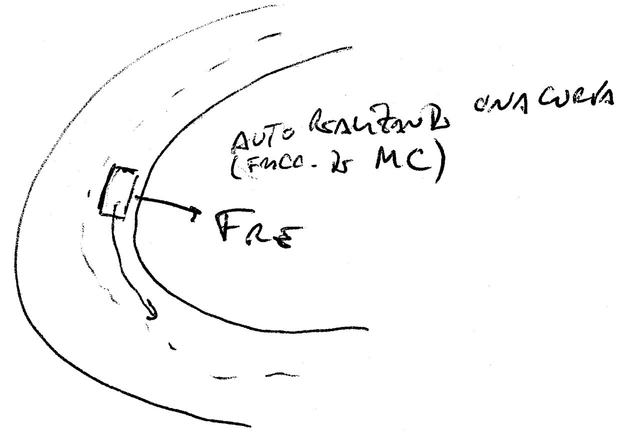
apuntan al centro de giro.

Ej: Boleadora horiz.



Péndulo cónico

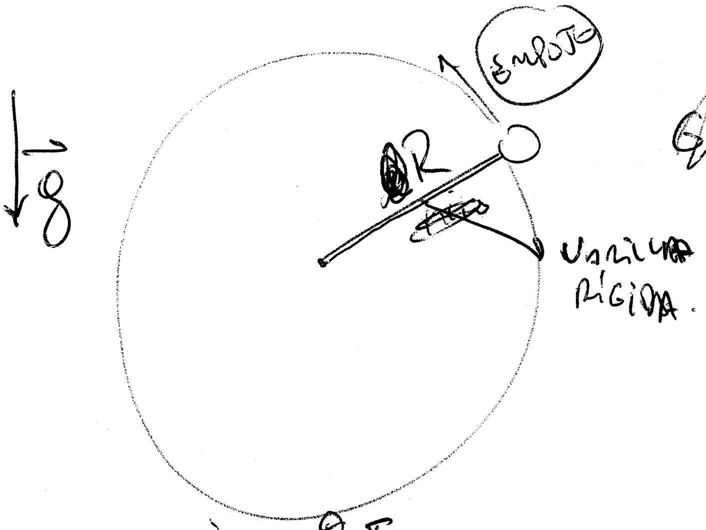




Piensen ejemplos

Los probl. se resuelven = q' antes: uno identifica las $\vec{F}$, las refiere al sist. de coord., escribe sus componentes y después aplica 2º ley N p/cada dirección $(\hat{r}$ y $\hat{\theta})$

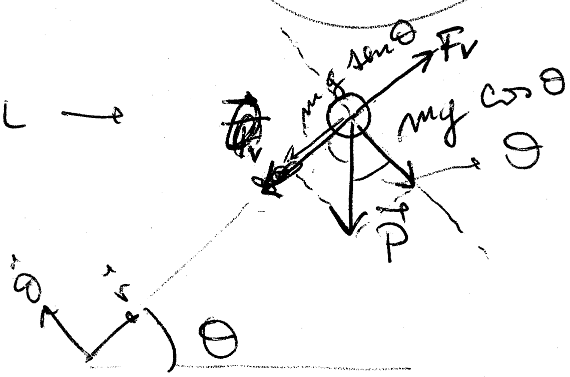
EJ:



~~Girando a $\omega = cte$ $(\gamma = 0)$~~

Hablar un poco de Fv (parecida a una T

DCL →



$\hat{r})\ \sum F_r = m(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)$

$\Rightarrow F_v - mg\, \text{sen}\,\theta = -m R \omega^2$

$\underbrace{-F_v + mg\, \text{sen}\,\theta}_{F_{centrípeta}} = m \underbrace{R\omega^2}_{a_c}$

$\sum F_\theta = m(\cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta})$

$\hat{\theta})\ -mg\cos\theta = m R \gamma$

A la ec. en $\hat{r}$ la llamamos condición de vínculo ó ecuac. de vínculo. Es la que fuerza al mov. a ser circular.

Obviamente, la comp. del peso va a cambiar con $\theta \Rightarrow F_v$ "se ajusta" para que el mov. sea circular.

Notar que este mov. requiere de un ω_0 inicial

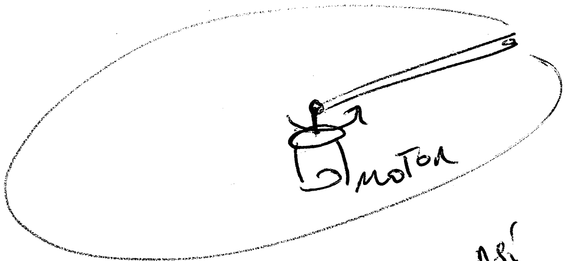
La ec. de mov. surgirá de resolver la ec. en $\hat{\theta}$ respetando la condición de vínculo. ~~analítico~~ buscar $\theta(t)$

El caso presentado es imposible de resolver analíticamente (las ec. dif en las que aparece $\operatorname{sen}\theta(t)$ ó $\cos\theta(t)$ no tienen solución única, se puede resolver solamente en alguna aprox)

Un caso q' se puede resolver es forzar a que $\omega_0 = cte.$ $(\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t)$

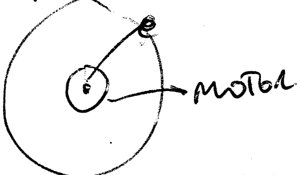
La pregunta es ¿cómo debe ser $\vec{F}_V$ p/que eso suceda?

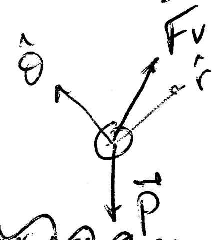
~~Pero~~ En ese caso, la $\vec{F}_V$ tiene comp. en $\hat{\theta}$



No dibujar así

Dibujar así





(No sé p/donde apunta pero seguro tiene comp. $\hat{\theta}$)

Las ecs. quedan:

$$\hat{r})\quad F_{v_r} - mg \operatorname{sen}\theta = -m R \omega_0^2$$

$$\hat{\theta})\quad F_{v_\theta} - mg \cos\theta = m R \gamma = 0$$

Notar q' la comp. $\hat{\theta}$ de $\vec{F}_V$ compensa a la comp $\hat{\theta}$ del peso p/mantener $\dot{\theta} = \omega_0 = cte$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{v\theta} &= mg\cos\theta \\ F_{vr} &= mg\operatorname{sen}\theta - mR\omega_0^2 \end{aligned}}$$

Obviamente varían con θ, reemp. $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t \rightarrow$ listo.