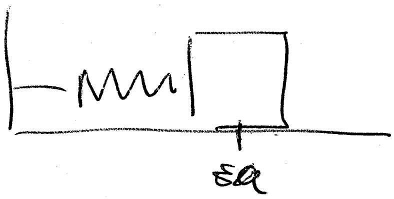
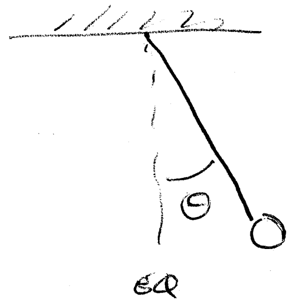
Clase 6:

Fuerzas de recuperación - osciladores

Vamos a conc. en 2 casos que son muy similares:

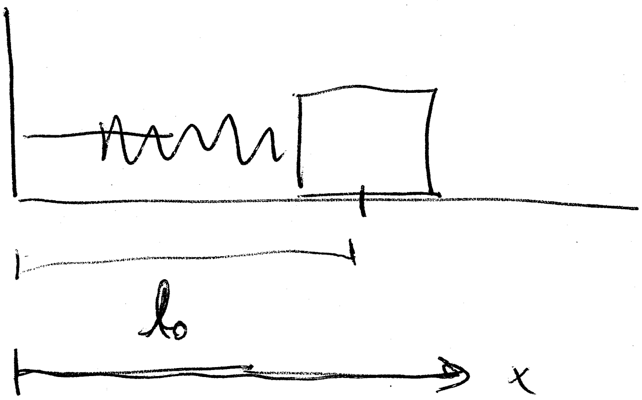




Ambos son casos de eq. estable → si lo separo de su posic. de eq. la fza. siempre lo devuelve → F. restitutiva.

Ambos dan lugar a oscilaciones

Concentrémonos en el resorte y desp. generaliz.:



explicar l_0

relación con eq.

elección del sist. ref.

($x=0$ en l_0 o no)

Notar q' si incrementamos x el resorte hace $\vec{F}$ ←

Pero si lo comprimimos $\vec{F}$ →. Si lo dejamos en la posic. de eq. ⇒ $\vec{F} = 0$. Además $|F|$ aum. si aum. Δx

Como siempre, uno puede pensar q' para deformaciones pequeñas la $\vec{F}$ es lineal con la def. del resorte

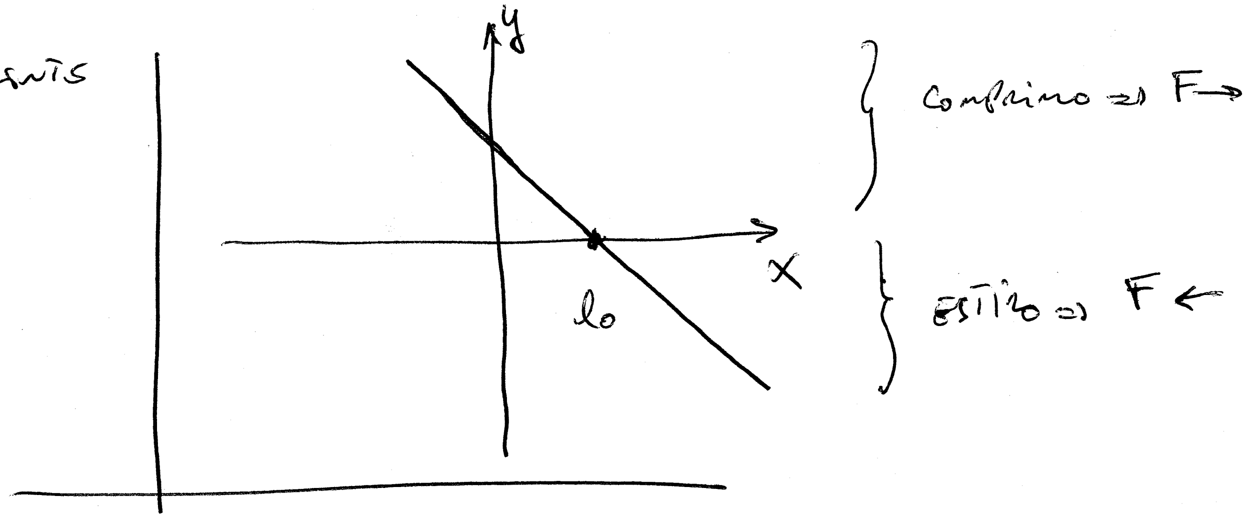
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{EL} = -K(x-l_0)\,\hat{x}$$

Ley de Hooke

($ó \quad \vec{F}_{EL} = -KX\,\hat{x}$ origen en l_0)

K es un parámetro exp. que da cuenta de la magn. de la F_E p/un dado estiramiento. Sus unidades son $[K] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{N}{m}$

Gráficamente



Notar que si ponemos el origen de coord. en $l_0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -kx}$

Logramos esto.

~~Vemos~~ El problema estático (cuánto vale $\vec{F}_E$ p/un dado $\Delta\vec{x}$) es trivial, lo interesante es analizar la ecuación de mov.

sup. sólo F_E

$$m a = F_E \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m}\right)x}$$

es una ec. dif. de 2º orden. Un caso part. de la ec. de Euler (también $\dot{x}$)

En part., esta se resuelve fácil recordando que

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \longrightarrow (\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x$

$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x \longrightarrow (\cos x)'' = -\cos x$

Notemos entonces que una función ~~seno~~ ó coseno cumple la ec., siempre y cuando tenga la forma:

$$x(t) = A \,\text{sen}\,(\omega_0 t + \varphi)$$

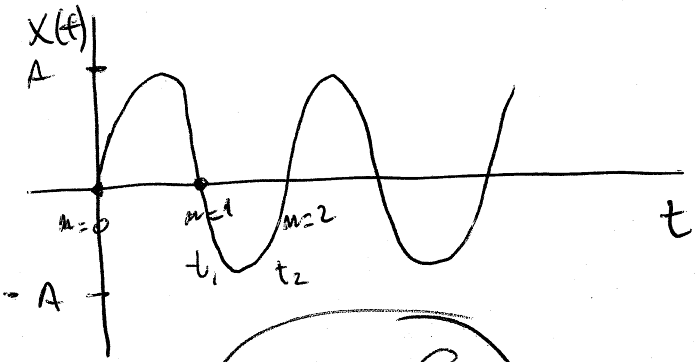
Probemos ⟶ $\dot{x} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \omega_0$

$$\ddot{x} = -A \,\text{sen}\,(\omega_0 t + \varphi)\, \omega_0^2 = -\omega_0^2 x$$

Comparando con la ec de Newton ⟶ si $\boxed{\omega_0^2 = \frac{K}{m}}$ ✓

ω_0 sale de la ec. dif., depende de K, m (condic. dinámicas)

Pero ¿qué significa? (sup. $\varphi \equiv 0$)



$\text{sen}(\;) = 0$ si ~~...~~

$(\;) = n\pi$ $(n = 0, 1, 2 \ldots$

$$\omega_0 \cdot t_1 = \pi$$

$$\omega_0 \cdot t_2 = 2\pi \longrightarrow t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

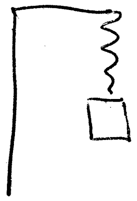
MAS

Fíjense q' en t_2 se cumple un ciclo completo de mov. (ida y vuelta) ⇒ t_2 es similar al período del mov. circular.

Si recordamos su def., y vemos q' este tamb. es un mov. periódico

$$\Rightarrow t_2 \equiv \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

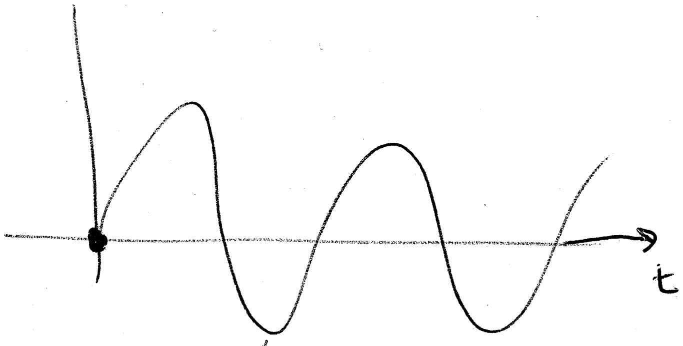
ω_0 es lo q' llamamos frecuencia angular (análoga a la v angular de MCU)

PASO: ¿cómo cambia el problema si  ?

Charlarlo un poco y detallo p/ellos
(EQ.)

OTRA: ¿Qué rol juegan A y φ?

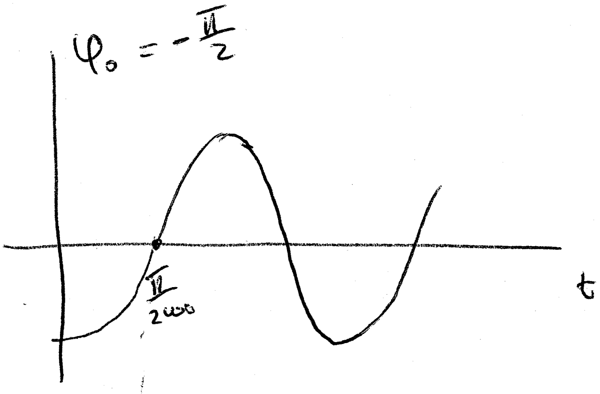
Está claro que A va a dep. de cuánto separe al obj. de su posic. de eq. al comienzo y φ



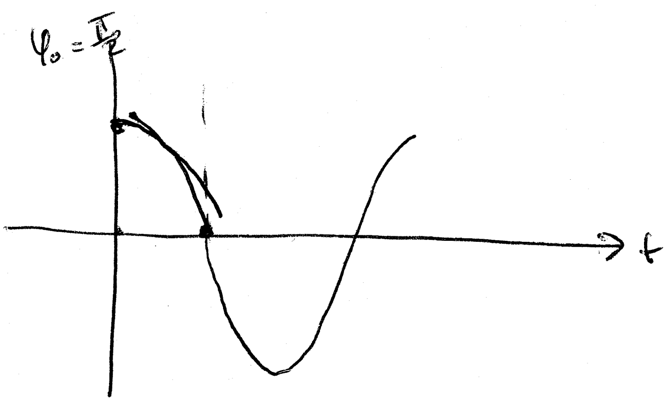
si $\varphi = 0$ el sen empieza en cero, pero si $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ tengo que esperar hasta que $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ para llegar al punto marcado en el gráfico $\longrightarrow$ el gráfico se adelanta

$$x(t) = A \,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Análogamente, si $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ el gráf. se atrasa y en $\omega_0 t = 0$ voy a estar en el máximo



O sea que φ_0 depende de "hacia dónde" se mueve el objeto y con qué v, al principio



$\boxed{\text{Esto se resume en que son las cond. iniciales las que definen a } A \text{ y a } \varphi_0}$

Uno resuelve y obt.

$$X(t) = A \,\text{sen}\left(W_0 t + \varphi_0\right)$$

y luego, con datos sobre posición y v inicial

$\rightarrow$ se obt. A y φ_0

$X(t=0) = X_0$ (dato) y $v(t=0) = v_0$ (dato)

$$\Rightarrow \boxed{X_0 = A \,\text{sen}\, \varphi_0}$$

$$v(t) = \dot{x} = A \cos\left(w_0 t + \varphi_0\right) w_0 \Rightarrow \boxed{v_0 = A w_0 \cos \varphi_0}$$

2 ec.
2 inc. ✓

Yo puse sen, ¿qué pasa si pongo cos?

(al menos en módulo)

$A \equiv$ amplitud no va a cambiar, pero el seno y el coseno están desfasados, entonces lo que sí va a cambiar es $\varphi \equiv$ fase inicial (lo que vale el paréntesis en $t=0$)

$\Rightarrow$ Uno puede elegir lo que más le guste y resolver el problema.

$W_0 \equiv$ frec. natural del resorte

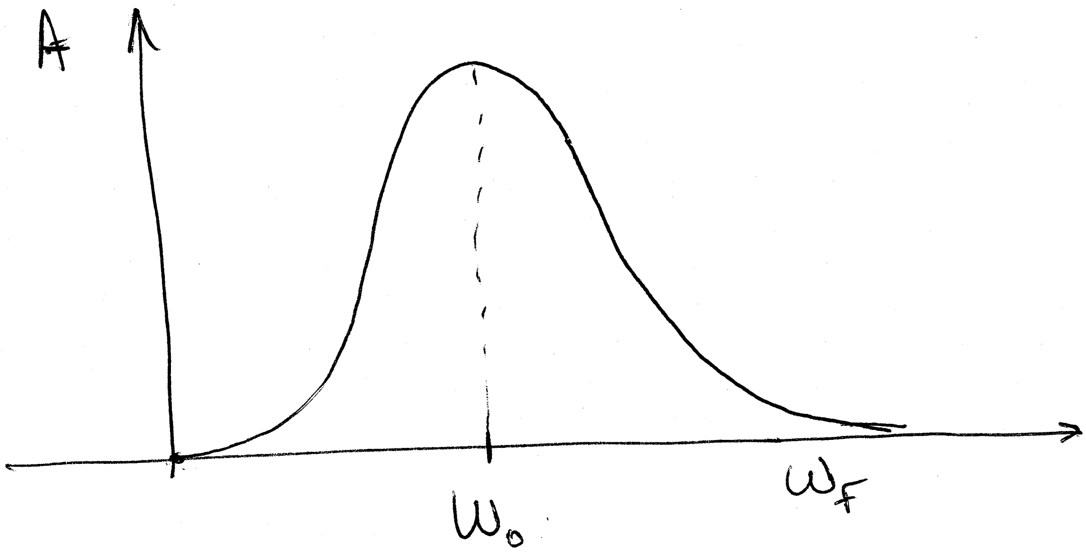
(si lo empujo, va a ir sólo a esta W_0)

Forzado - resonancia

OSCILAC. FORZADAS

UN CASO INTERESANTE, CON ANÁLOGOS EN ELECTRICIDAD, NEUROCIENCIA, CIENCIA DE MATERIALES, ETC., ES EL CASO EN EL QUE SE FUERZA A UN OSCILADOR CON UNA FUERZA SINUSOIDAL cuya FREC. ES ω_F

NO VAMOS A ENTRAR EN DETALLES SOBRE LA CURVA PERO LO Q' SE OBS. ES :



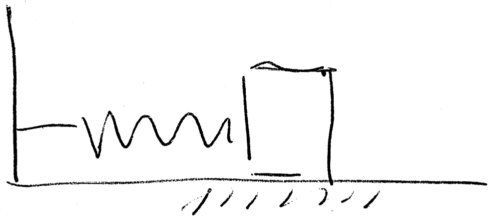
ANALOGÍA HAMACA

ω_0 ES (ADEMÁS DE LA FREC. NAT.), LA <u>FREC. DE RESONANCIA</u> AQUELLA A LA QUE ES MÁS FÁCIL <u>TRANSFERIR ENERGÍA</u>

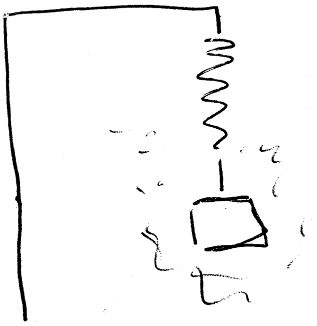
~~Vamos al caso~~

$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$ TIENE AMPLITUD $= cte$

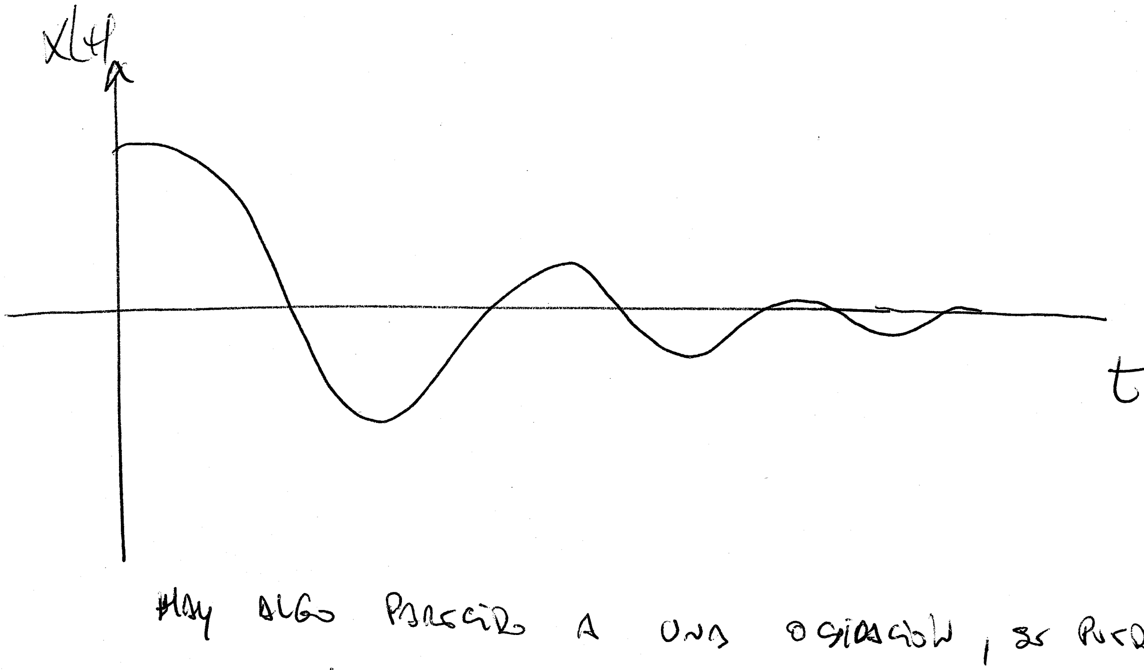
QUE NO DECAE NUNCA, PERO ESTO NO SUELE SER ASÍ EN LA REALIDAD



F_{roz}



$\vec{F}_{viscosa}$



HAY ALGO PARECIDO A UNA OSCILACIÓN, SE PUEDE DEFINIR UN PERIODO, PERO $A = A(t)$

En el caso de F_v

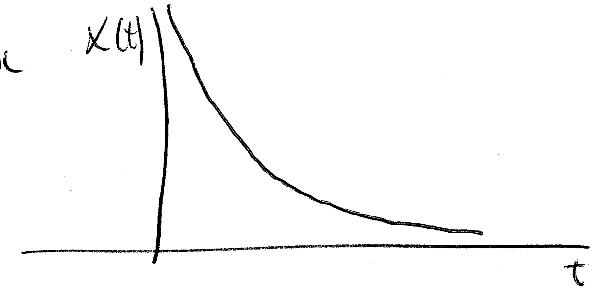
$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

~~Lo que se obtiene es~~ $\cancel{A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}}$

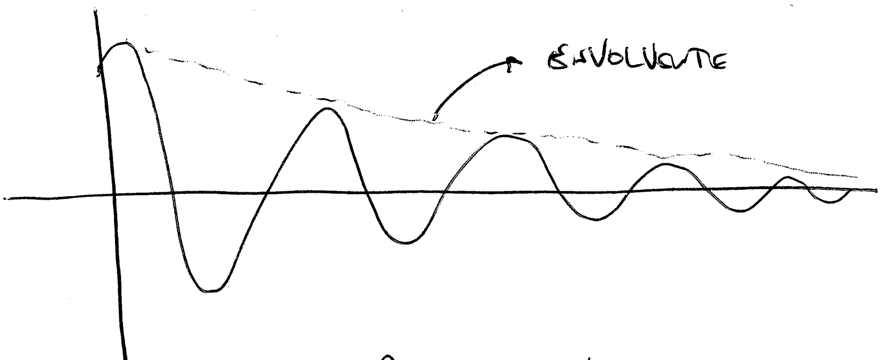
1) En ese caso puede pasar que el amortiguamiento sea tan grande que el sist. no llegue a oscilar

$$\longrightarrow x(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right) \quad A, B \text{ cond. inic.}$$

y el mov. es exponencial



2) Caso + interesante ⟶ subamortiguado. (amort. menor)



Es como si $A(t)$ fuera una exponencial

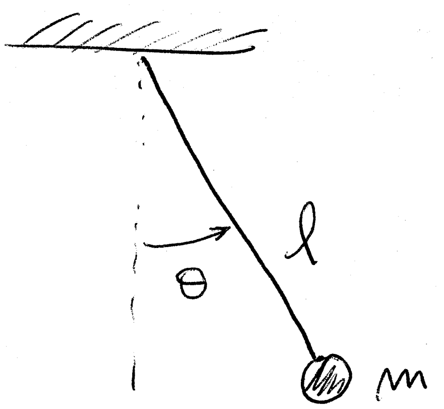
$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}}_{A(t)} \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

F_v no sólo afecta a la amplitud, ω también es levemente $\neq$

$$\beta = \frac{b}{2m} \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

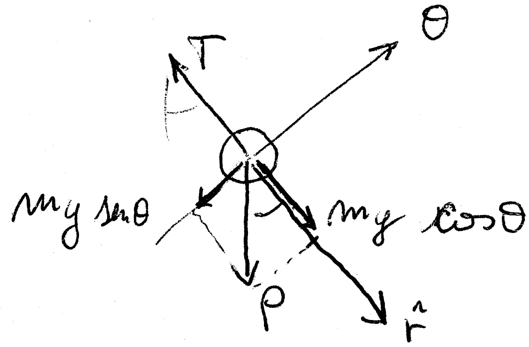
$$\omega_0 \to \sqrt{\frac{k}{m}}$$

OTRO PROBLEMA EN EL CUÁL SE DA EL FENÓMENO DE OSCILACIONES ES EL PÉNDULO.



ES UN MOV. CIRCULAR INCOMPLETO

PERO ⇒ LO PODEMOS PLANTEAR EN COORD. POLARES



$$\hat{r})\quad mg\cos\theta - T = -m\,l\,\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta})\quad -\cancel{m}g\,\mathrm{sen}\,\theta = \cancel{m}\,l\,\ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

ESTA EC. DIF. <u>NO</u> ES UN MAS $\left(\ddot{x} = -\omega_0^2\, x\right)$

SIN EMBARGO, SI θ ES PEQUEÑO, UNO PUEDE USAR EL DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR DEL SENO θ PARA $\theta \approx 0$

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \cancel{\mathrm{sen}\,0} + \cos 0 \cdot \theta + \cancel{(-\mathrm{sen}\,0)}\,\frac{\theta^2}{2!} + (-\cos 0)\,\frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

SÓLO QUEDAN LOS IMPARES y si $\theta \approx 0 \Rightarrow \theta^3 << \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta}$$ 1º ORDEN.

En ese caso

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\,\theta \longrightarrow$$ y esta sí es la ec. del MAS

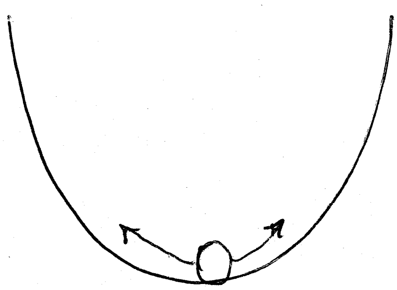
$$\therefore \quad \theta(t) = \theta_0 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

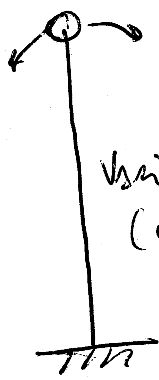
Con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ y recordando que $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \longrightarrow$$ Midiendo el período de un péndulo podemos obtener g

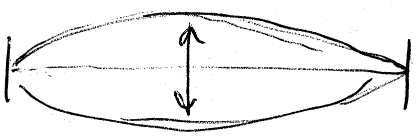
Posic. de eq. $\theta = 0$

Esto ocurre p/ ~~[illegible]~~ todos los sistemas en los que haya una posic. de eq estable y una F restitutiva.





Varilla de metal (edificio)



Cuerda (guitarra - piano)