Clase 7 Trabajo y energía

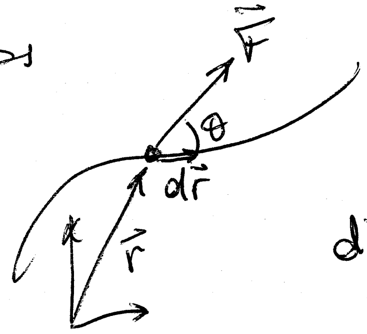
Noción de trabajo (W): esfuerzo (ej. fuerza) para mover (desplazar) un cuerpo

Ej: levantar algo ⇒ $\vec{F}$ q' compense al peso (al menos), y hago "+ trabajo" cuanta "+ distancia" lo desplazo.

⇒ W dep. de $\vec{F}$ y de $\Delta\vec{x}$

Como la trayectoria puede ser una curva arbitraria

⇒

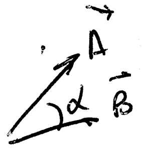


Vamos a pensar cuál es el W de desplaz. diferencial $d\vec{r}$ (vector de módulo diferencial).

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

⇒ si W dep. de $\vec{F}$ y $d\vec{r}$, el trabajo para desplazarme $d\vec{r}$ por acción de $\vec{F}$ se define como:

$$\boxed{\begin{array}{l} dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{(prod. escalar)} \\ dW = F_x\,dx + F_y\,dy \; (+F_z\,dz) \end{array}}$$



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\alpha \Rightarrow dW = F\,dr\cos\theta$$

Notar que el signo de dW dep. de θ, si $\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta > 0$

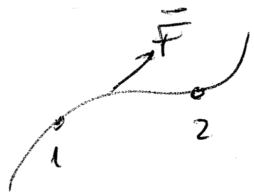
$\Rightarrow dW > 0$, pero si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow dW < 0$ (símil los otros cuadrantes cos(α))

En part., si $\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow dW = 0$

$\vec{F}$ no hace trabajo p/ generar q/ desplaz.

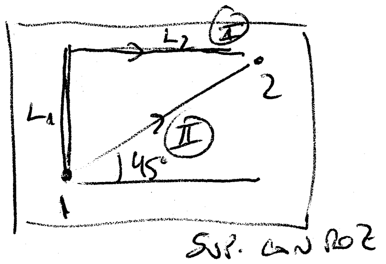
Si quiero el trabajo en un trayecto finito (no diferencial)

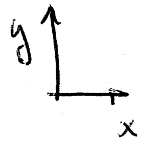
$$\Rightarrow \quad W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$



$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\, dy \left(+ \int_{z_1}^{z_2} F_z\, dz \right)$$

El trabajo puede depender del camino desde 1 hasta 2, por ej.





$$W_{I} = \int_{L_1} \vec{F}_R\, d\vec{r} + \int_{L_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \qquad (L_1 = L_2 = L)$$

en $L_1 \to d\vec{r} = dy\,\hat{y}$ y $\vec{F}_R = -\mu_D N\,\hat{y}$

$L_2 \to d\vec{r} = dx\,\hat{x}$ $\quad \vec{F}_R = -\mu_D N\,\hat{x}$

$$\Rightarrow \quad W_{I} = \int_{y_0}^{y_f} -\mu_D N\, dy + \int_{x_0}^{x_f} -\mu_D N\, dx =$$

$$= -\mu_D N \underbrace{(y_f - y_0)}_{=L} - \mu_D N \underbrace{(x_f - x_0)}_{=L} = -2L\mu_D N$$

$$W_{II} = \int_{II} \vec{F}_R\, d\vec{r}$$

Ahora $d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$

$\vec{F}_R = (F_{Rx}\,\hat{x} + F_{Ry}\,\hat{y})$

$F_{Rx} = -\mu_D N \cos 45°$

$\sqrt{2}/2$

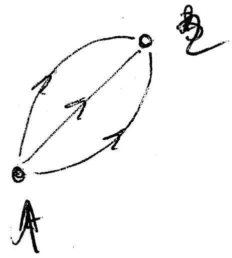
$F_{Ry} = -\mu_D N \sin 45°$

$$\Rightarrow \quad W_{II} = \int_1^2 F_{Rx}\, dx + \int_1^2 F_{Ry}\, dy \quad (\text{los cruz. dan cero})$$

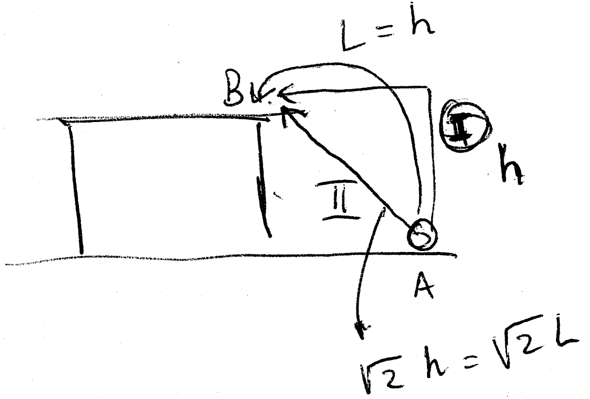
$$W_{II} = \int_{x_0}^{x_f} -\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_D N\, dx + \int_{y_0}^{y_f} -\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_D N\, dy = -\sqrt{2}\, L\mu_D N$$

Ver si se dan cuenta de alinear $d\vec{r}$ con camino

P/ algunas $\vec{F}$ el W es indep. del camino → <u>F conservativas.</u> ③



Por ej. el peso, digamos que hay q' llevar un objeto desde A hasta B:



$$dW = \vec{P} \cdot d\vec{r} =$$
$$= -mg\,\hat{y} \cdot (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y})$$

Notar que, dado que y F peso está sólo en $\hat{y}$ $\Rightarrow$ $dW = -mg\,dy$

$$\Rightarrow W_{AB} = \int_A^B -mg\,dy = \int_{y_A}^{y_B} -mg\,dy = -mg(y_B - y_A)$$

Sólo dep. de y_A e y_B, <u>No del camino</u>

Una caract. adic. de las F conservativas → el trabajo vale cero si voy y vuelvo (mostrar con el ej. de arriba).

Eso se expresa $\oint_C \vec{F}_{cons}\, d\vec{r} = 0$ ∀ camino cerrado

→ esto define a la <u>F conservativa</u>

- Por ser cons. sólo puede dep. de la posición (no → dep. de la direcc. de desplaz → $\vec{v}$)
- Si dep. de algo + ⇒ <u>No</u> es conserv.

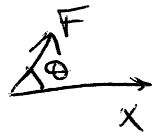
→ Vamos a usar esto p/definir la E. como la capacidad para producir trabajo.

UNIDADES → $[W] = [\vec{F}] \cdot [\vec{r}] = N \cdot m = J$

$= Dy \cdot cm = ERGIO$

$(\; ; \; d\vec{r} = dx \, \hat{i})$

EN UN CAMINO RECTO. $W = \int_{x_0}^{x_F} F_x \, dx = \int_{x_0}^{x_F} F \cos\theta$

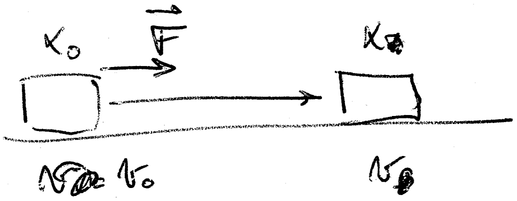


Y SI $F = cte \Rightarrow W = F \cos\theta \, (x_F - x_0)$

E CINÉTICA

PENSEMOS UN OBJ. CON $\vec{v}$ Y UNA $\vec{F}$ Q' LO FRENA O ACELERA.

$(\cos\theta = 1)$



$W_{TOT} = F \cdot (x_f - x_0) = m a \Delta x$

↳ RESULTANTE DE MUCHAS

RECORDAR DE MRUV → $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow a\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$

$\Rightarrow W = m \frac{v^2 - v_0^2}{2}$ → O SEA Q' W ES LA DIF EN UNA MAGNITUD AL PPIO Y AL FINAL DEL MOV. SOLAMENTE.

SI AGRUPAMOS ASÍ: $\boxed{W_{TOTAL} = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}}$

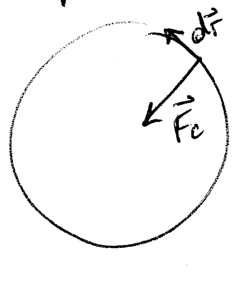
DEF. E. CINÉT. → $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ Y $\boxed{W_{TOT} = E_{cf} - E_{c0} = \Delta E_c}$

IMPORTANTE

TEO. DE LAS F. VIVAS

COMO NO DIJIMOS NADA SOBRE $\vec{F}$, PUEDE SER CONS. O NO.

EJ: MOV. CIRCULAR UNIF.



RECORDEMOS Q' EN MCU $\vec{F_c}$ SIEMPRE DEBE SER LA ÚNICA $\vec{F}$

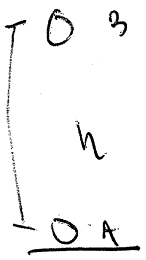
Y ES $\perp d\vec{r} \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

POR OTRO LADO $|\vec{v}| = cte$ (NO SU DIRECC.)

$\Rightarrow E_c = cte \Rightarrow E_{cf}$ (CUALQ. t) $= E_{c0} \Rightarrow \Delta E_c = 0$

Vamos a usar el hecho de q' las F cons. dep. sólo de la posic. p/definir otro tipo de E.

E. Potencial



Si uno lleva al obj de A hasta B, hizo un trabajo, pero además deja al objeto con "capacidad de moverlo" → si lo soltamos caerá.

Decimos entonces que el obj ganó E potencial al ir de A → B.

P/calcularla usamos $W_g = \int_A^B -mg\hat{y}\, dy\,\hat{y} = -mg(y_B - y_A) =$

$= -(mg\, y_B - mg\, y_A) \longrightarrow$ def. $mgy = E_{pg}$

y ent. $W_g = -\Delta E_{pg}$.

Esa E. potencial puede conv. en cinética (arriba tiene E_{pg}, pero si lo suelto, al bajar reduce su E_{pg} y aum. su E_c)

Por otro lado sabemos que $W_{total} = \Delta E_c$. En este caso, sólo actúa el peso (F. conservativa) $\Rightarrow W_{tot} = W_g$

$\Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \longrightarrow$ ~~dep~~ esto ocurre p/todas las F conservativas y por esto uno define la $\boxed{E_M = E_c + E_p}$ que, en el caso de que sólo actúan F cons. $\longrightarrow$ es cte (compensa ΔE_c con ΔE_p)

Notar que uno podría usar esta ec. de cons. p/obt. a q' h llega un obj. arrojado con v hacia arriba o con q' v cae un obj de una cierta altura sin pasar por la ec. de mov. (ver si es nec. mostrarlo).

En ciertos casos el enfoque energético simplifica el prob.

Mostrarlo

LA DEF. DE E_p SE PUEDE REESCRIBIR:

ESCRIBIR $E_p(\vec{r}_2)-E_p(\vec{r}_1)$ ⟵ $$\Delta E_{p_g} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{P}\cdot d\vec{r}$$; EN GRAL SERÁ ASÍ P/TODA Fcons.

$$\Delta E_p \left(\text{ASOC. A } \vec{F}\right) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

ESTO HACE Q' LA E_p SIEMPRE DEPENDA DE UN "CERO" (DEFINO $E_p(\vec{r}_1)\equiv 0$ Y CON ESO CALCULO LA $E_p(\vec{r}_2)$), SI NO, SIEMPRE SE DEFINE EN TÉRMINOS DE DIFERENCIAS.

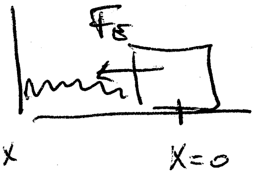
COMO E_p SALE DE INTEGRAR $\vec{F}$ ⇒ EN GRAL $F = -\dfrac{dE_p}{dr}$

EN LAS Q' VAMOS A TRABAJAR NOSOTROS $F = -\dfrac{dE_p}{dx}$ ó $\dfrac{dE_p}{dy}$

OTRAS F CONS

F ELÁSTICA

$\vec{F}_E = -kx\,\hat{x}$



$$\Rightarrow \Delta E_{p_E} = -\int_{x_0}^{x} (-kx)\,\hat{x}\, dx\,\hat{x}$$

$$E_{p_E}(x) - E_{p_E}(x_0) = -\int_{x_0}^{x} (-kx)\,\cancel{\hat{x}}\, dx\, \cancel{\hat{x}} = +k\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} = +\frac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right)$$

IGUALANDO MAM ⟶ $\boxed{E_{p_E}(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

NOTAR QUE SI DERIVO E_{p_E} ⟶ $\dfrac{dE_{p_E}}{dx} = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}kx = -F_E$ ✓

IDEM. $\vec{P} = m\vec{g}$

E Mecánica

Si uno tiene un cuerpo mov. bajo la acción de varias $\vec{F}$ (C y NC) podemos separar W_{12} en W^{C}_{12} y W^{NC}_{12}

$$W_{12} = \underbrace{W^{C}_{12}}_{= -(E_{p_2} - E_{p_1})} + W^{NC}_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

$$\Rightarrow \quad -(E_{p_2} - E_{p_1}) + W^{NC}_{12} = (E_{c_2} - E_{c_1})$$

$$\Rightarrow \quad W^{NC}_{12} = \underbrace{(E_{c_2} + E_{p_2})}_{E_{M_2}} - \underbrace{(E_{c_1} + E_{p_1})}_{E_{M_1}}$$

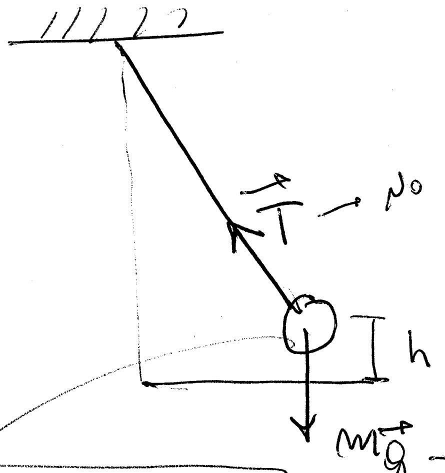
$$\Rightarrow \quad \boxed{W^{NC}_{12} = \Delta E_M}$$

$\Rightarrow$ La energía mecánica se conserva (cte) si $W_{FNC} = 0$

Notar q' no quiere decir que no haya FNC, pero si las hay, que no hagan trabajo

OBS. $E_{p_g}(r) = \frac{GMm}{r}$

Ej. : Péndulo



$\vec{T} \rightarrow$ no cons. (dep. de la dir. de mov.)

$m\vec{g} \rightarrow$ cons

Si hay t resolver dado h y $v_0 = 0$ como son E_p y E_c (si no tarea).

$\Rightarrow$ $E_M = cte$

Eso no quiere decir que E_c y E_p sean ctes, sino que lo es su suma

Cambian como pasa uno a otra...