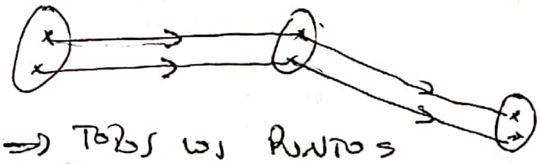
Cinemática del CR

Cuerpo rígido: objeto tq la dist. entre 2 puntos cualesquiera se mant. cte.

⇒ 2 tipos de mov.

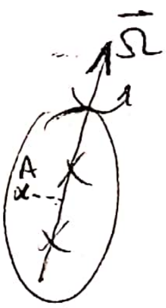
Traslación: cuando las tray. de todos sus puntos son rectas paralelas



⇒ todos los puntos tienen $= \vec{v}$

Rotación: la posición de 2 ptos permanece fija (define un eje, con $\vec{v} = 0$)

↳ eje de rotación



Por ej., el punto "A" describe una tray. circular alrededor del eje de rotación, en un plano $\perp$ al eje.

Notar q' este concepto carece de sentido en part. puntuales.

Entonces:
el mov. + gral de un CR = ~~rotación~~ traslación + rotación

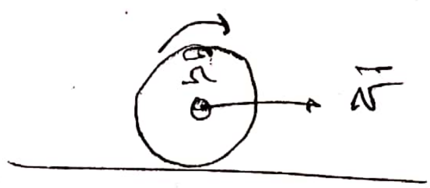
Ej.

a)

Avanza y gira.

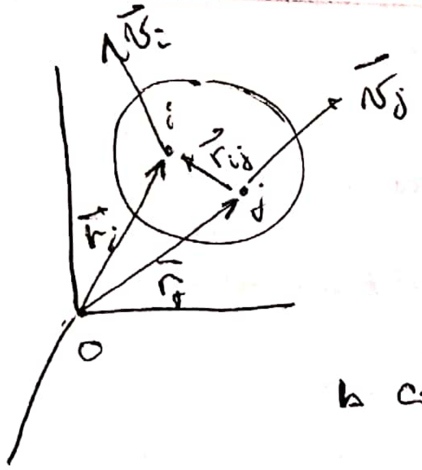
$\vec{v} \parallel \vec{\Omega}$ ⇒ mov. helicoidal

b)



En este caso $\vec{v} \perp \vec{\Omega}$

⇒ mov. plano



Sup. un CR en un sist. ref "O"

La condición de rigidez dice que $|\vec r_{ij}| = cte$

y $\vec r_{ij} = \vec r_i - \vec r_j$ (posic. de "i" respecto de "j")

⇒ Si me paro en j, i sólo puede rotar a su alrededor.

¿Qué pasa entonces con la $\vec v_{ij}$ = veloc. de i resp. de j?

$\vec v_i \equiv \vec v$ de i resp. de O ; $\vec v_j \equiv \vec v$ de j resp. de O

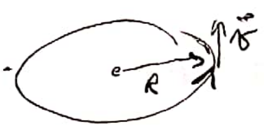
$\vec v_{ij} = \vec v_i - \vec v_j = \frac{d\vec r_{ij}}{dt}$ (1) → Tiene q' ser una v tangencial en un mov. circular. (+)

Pero $\vec r_{ij} = |\vec r_{ij}|\, \hat r_{ij}$ (un sist. de coord. polares fijo a j)

ir a (*)

(⊗) ⇒ $\frac{d\vec r_{ij}}{dt} = \underbrace{\frac{d|\vec r_{ij}|}{dt}}_{=0} \hat r_{ij} + |\vec r_{ij}| \times \frac{d\hat r_{ij}}{dt} \xrightarrow{\text{por } (+) \text{ y } (*)} \frac{d\vec r_{ij}}{dt} = \vec\Omega \times \vec r_{ij}$

(*) Recordar q' $v_{TANG} = \omega \cdot R$



Si def. ω como vector, tq sea ↑ si el sent. es ant. y ↓ si es horario ⇒ $\vec v = \vec\omega \times \vec r$ volver a ⊗

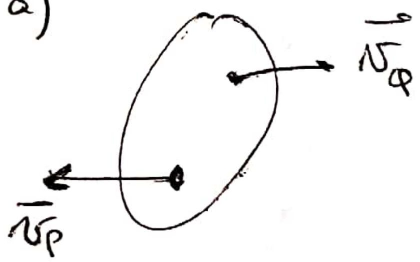
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\Omega} \times \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)} \quad (2)$$

Válido p/ cualquier par de puntos de un CR en cualq. sist. ref.

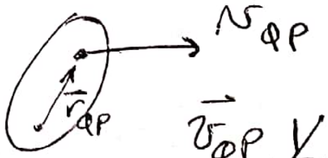
Notar q' esto implica q' $(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \perp (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

Esta condición nos permite ident. CR:

a)



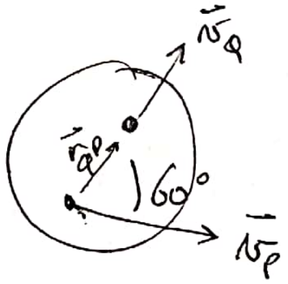
Si me paro en P:



$\vec{v}_{QP} \not\perp \vec{r}_{QP}$ en gral

$\Rightarrow$ no es CR

b)



$|\vec{v}_P| = 2|\vec{v}_Q|$

$\Rightarrow \vec{v}_{QP} \cdot \vec{r}_{QP} = (\vec{v}_Q - \vec{v}_P) \cdot \vec{r}_{QP} = \vec{v}_Q \cdot \vec{r}_{QP} - \vec{v}_P \cdot \vec{r}_{QP}$

$= v_Q r_{QP} - v_P r_{QP} \cdot \underbrace{\cos 60°}_{0,5} = 0 \Rightarrow$ es CR

La ec. (2) teorema de Chasles: $\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

dice q' la v_i es la de j + la de i rotando alr. de j

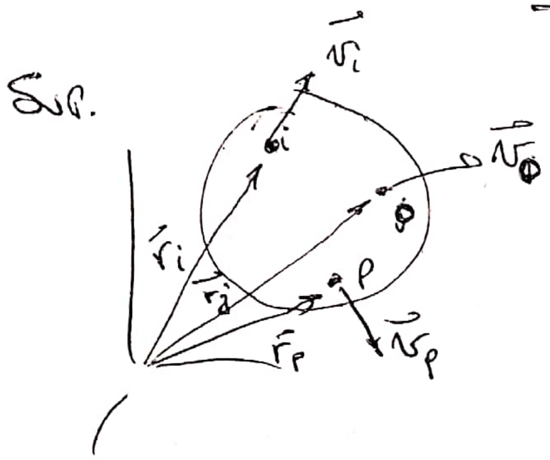
→ es la ley de adición de $\vec{v}$, y vale p/ cualq. punto de la CR resp. de otro.

La elección de j se basa (como siempre) en la conveniencia

Por ej., si hay un CR vinculado a un pto fijo o eje fijo, cualq. punto sobre él tendrá $\vec{v} \equiv 0$ y entonces $\vec{v}_i$ será sólo una v de rotación

Si el cuerpo no está vinculado es común elegir $\mathcal{O} \equiv$ CM, de forma tal q' el mov. se reduce a una trasl. del CM (tipo mec. puntual) y una rot. alr. de él.

Sup.



$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \quad (3)$$

¿Quién es $\vec{\Omega}$? En (3) parece ser la v. ang. de rot. alr. de "O"

Veamos q' ocurre si cambiamos por el punto "P" $\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_P + \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_P)$ (4)

¿Cuál es la relac. entre $\vec{\Omega}$ y $\vec{\Omega}'$?

Yo podría escribir (i es arbitrario) $\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0)$ (5)

$\Rightarrow$ con (5) en (4) $\longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0) + \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_P) =$

$$= \vec{v}_0 + (\vec{\Omega} - \vec{\Omega}') \times \vec{r}_P + \vec{\Omega}' \times \vec{r}_i - \vec{\Omega} \times \vec{r}_0 \quad (6)$$

Como (6) = (3) p/cualq. i $\Rightarrow$ eso sólo es posible si $\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'}$

$\longrightarrow \vec{\Omega}$ es el mismo cualq. sea el punto de ref., es una característica del CR.

Eje inst. de rotación (EIR)

Supongamos q' en un cierto instante t, un punto "O" tiene $\vec{v}_O = 0$

$$\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \quad (7)$$

⇒ Tomando "O" como centro de ref., el mov. es instantáneam. una rotación pura

⇒ debe ∃ un eje de rotación t.q. la $\vec{v}$ de todos los puntos de ese eje es cero.

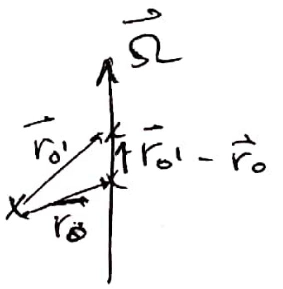
Sea O' otro punto de ese eje → $\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{0'})$ (8)

Como (7) = (8) ⇒ $\vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0) = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{0'}) \Rightarrow \vec{\Omega} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{0'}) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} \parallel (\vec{r}_0 - \vec{r}_{0'})}$$

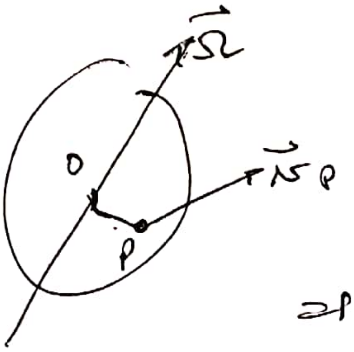
→ el eje de rotación (si ∃) coincide con la dir. de $\vec{\Omega}$

Notar q' puede no ∃ un eje de rot., pero sí $\vec{\Omega}$ (o sea, cuando la rot. no es pura) ⇒ esto quiere decir q' eje de rotación no es lo mismo que vector rotación ($\vec{\Omega}$)



En otro instante, los puntos pueden tener $\vec{v}$ y otro eje pasar a ser eje de rotación, por lo que este eje debe definirse instante a instante ⇒ EIR

¿Cuándo ∄ EIR?



Si ∃, sería $\parallel \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{v}_P$ sería $\parallel$

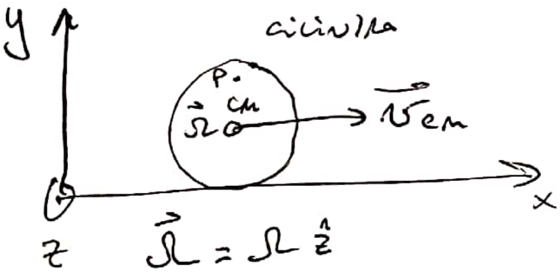
$$\vec{v}_P = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O) \Rightarrow \vec{v}_P \perp \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_P \cdot \vec{\Omega} = 0 \;\; \forall P \iff \exists \text{ EIR}}$$

Si ∃ algún P q' no cumpla $\Rightarrow$ ∄ EIR.

(o sea si $\vec{v}_P$ tiene alguna comp. $\parallel$ a $\vec{\Omega}$)

<u>Rodadura</u>: mov. plano tq $\vec{v}_{\text{traslación}} \perp \vec{\Omega} \Rightarrow \exists$ EIR



$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_{CM})$$

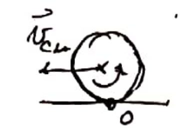
Sea "O" un punto del EIR $\Rightarrow 0 = \vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_O - \vec{r}_{CM})$
$(\vec{v}_O = 0)$

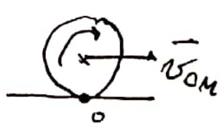
$$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) \quad ; \quad \vec{v}_{CM} = v_{CM}\,\hat{x} \text{ y } \vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$$

$\Rightarrow (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) = |\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O|\,\hat{y} \longrightarrow$ o sea q' el "O" debe estar en una línea $\parallel$ al eje $\hat{y}$ y pasar por CM

En particular, si "O" es el punto en cont. con el suelo, $\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O = R\,\hat{y}$ y entonces

$$\vec{v}_{CM} = \Omega \hat{z} \times R \hat{y} = -\Omega R \hat{x} \quad \begin{cases} \text{si } \Omega > 0 : & \text{antih.} \\ \text{si } \Omega < 0 & \text{H} \end{cases}$$





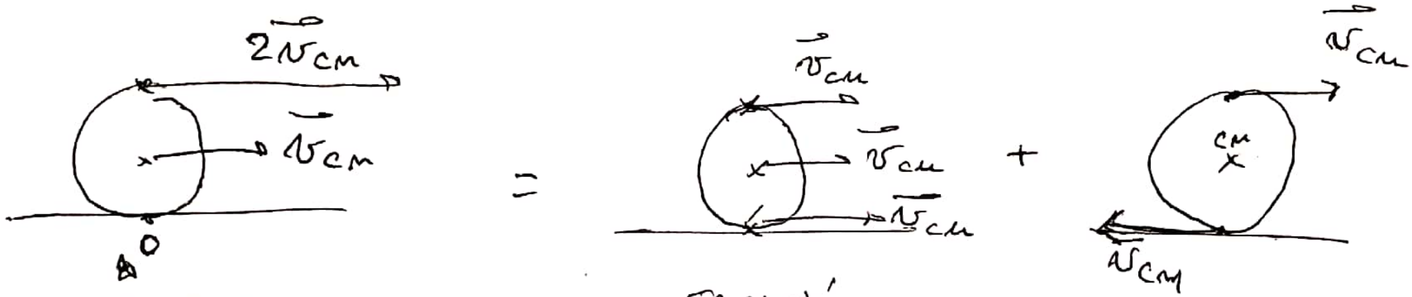
ESTE MOV. SE LLAMA RODADURA Y LA COND. $\boxed{\vec{v}_{CM} = \Omega \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_0)}$

ES LA CONDICIÓN DE RODADURA DONDE, INST. A INST., O ES UN PUNTO

CON $\vec{v}_0 = 0$, POR EL CUAL PASA EL EIR

NOTAR Q' SIEMPRE PUEDO DESCRIBIR EL MOV. COMO UNA

TRASLACIÓN + UNA ROTACIÓN.



~~ROTAC. ALR.~~ ROTAC. ALR. DE "O" (EIR)

TRASLACIÓN RÍGIDA

ROT. ALR. DEL CM.

Dinámica del CR

Mov. del CR ≡ mov. trasl punto cualq. (p. ej. CM)
+ rot. alr. de un eje q' pasa por el punto elegido ($\vec{\Omega}$ del cuerpo)

En algunos casos, eligiendo conv. el punto, → rot. pura alr. de un eje.

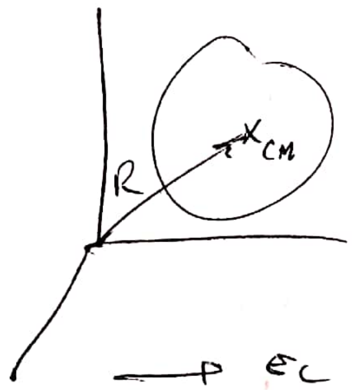
Ese eje puede variar inst. a inst. ⇒ EIR

En otros casos, no → ej. → trasl. pura
→ mov. helicoidal.

Esto quiere decir → dinámica del CR → traslación
→ rotación.

Notar q' es un sist. de part. q' cumple la cond. de vínculo de rigidez → No habrá resultados nuevos sino restringidos a la cond. de rigidez.

Dinámica de traslación



Ya sabemos q' $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$

→ M ≡ masa total $\vec{P}$ ≡ imp. lineal total

→ el CM se mueve como si todas las F estuvieran aplicadas sobre él.

De forma similar podemos ver el mom. ang. del CM. resp. de "O"

$$\vec{L}_0^{CM} = \vec{R} \times \vec{P} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0^{CM}}{dt} \underset{\substack{\downarrow \\ (\vec{v}_{CM} \parallel \vec{p})}}{=} \vec{R} \times \vec{F}_{EXT} = \vec{M}_0^{EXT}$$

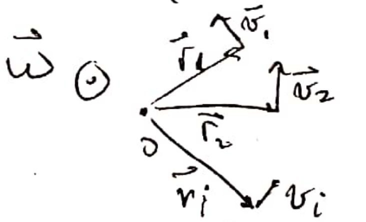
⇒ Es como si todas las $\vec{F}_{ext}$ estuvieran aplicadas en el CM.

$$\vec{R} = \frac{\int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV}{M} \qquad y \qquad M = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$$

Densidad volumétrica.

Para describir la dinámica de la rotación, necesito un concepto +

Veamos el sig. caso: sea un sist. de part. en rotación alr. de un eje q' pasa por "O", con v. ang. $\vec{\omega}$



la Ec. rotación será $E_{c_{ROT}} = \sum_i E_{c_{ROT,i}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Pero $v_i = r_i \omega \Rightarrow E_{c_{ROT}} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega^2$

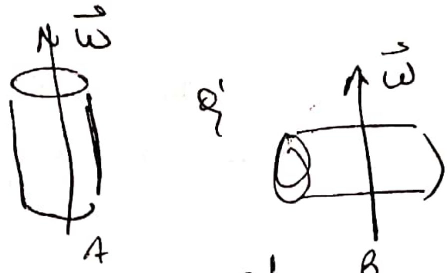
Esta cantidad, q' considera la masa y distribución de las partículas recibe el nombre de momento de inercia respecto del punto "O"

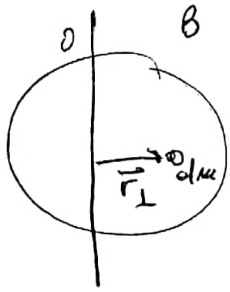
$$I_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Notar q' I_0 juega, en la rotación, un rol similar al q' juega m en la traslación (de ahí el nombre)

Es una medida de la inercia del sistema en el mov. de rotación (mayor I_0 → mayor es el trabajo nec. para dotar al sistema de $\vec{\omega}$)

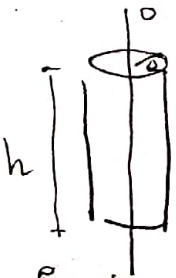
¿Cómo es I_0 en un CR? (10)

No es lo mismo  , por lo que $I_0^A \neq I_0^B$

$$I_0 = \int_M r_\perp^2 \, dm$$  $$\Rightarrow \quad I_0 = \int_V \rho(\vec{r}) \, r_\perp^2 \, dV$$

$r_\perp \equiv$ dist. $\perp$ al eje, elevado al cuadrado.

Algunos casos simples:

1) 

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \int \rho \, r^2 \, dV \\ dV &= 2\pi r h \, dr \quad \text{(coord. cilíndricas)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_0 = 2\pi \rho h \int_0^a r^3 \, dr$$

ρ = unif. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi}{2} \rho h a^4 \\ \text{pero como } M &= \rho \pi a^2 h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{M a^2}{2}}$$

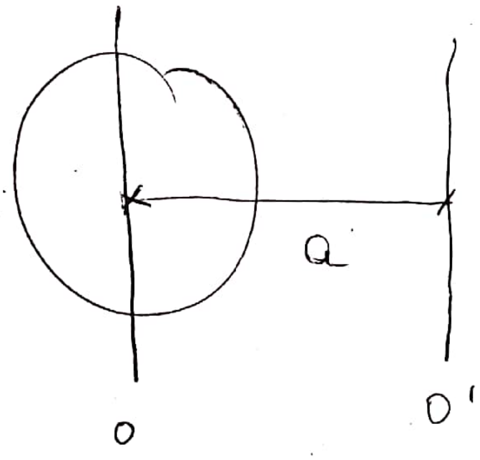
2) Anillo homogéneo de masa M y radio R resp. de un eje q' pasa por su centro geom. $\boxed{I_0 = \frac{1}{2} M R^2}$

3) Esf. homog. resp. de un eje q' pasa por su centro

$$\boxed{I_0 = \frac{2}{5} M R^2}$$

Teo. de Steiner

Qué pasa si busco el I resp. de otro eje (y conozco I_{CM} y el eje que pasa por el CM.)

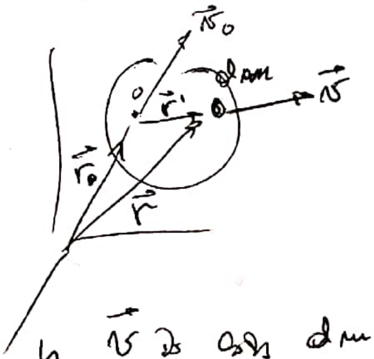


$$I_{O'} = I_{CM} + Ma^2$$

Es sencillo de ver, sólo importa el $r_\perp^2$ y siempre se puede escribir como (la dist. ⊥ entre O' y el CM)^2 + (la dist ⊥ entre el CM y el punto)^2

Energía cinética de un CR

Para un CR general, la Ec es la suma de las Ec de sus partes (dm)



$$dE_c = \frac{1}{2} v^2 dm \Rightarrow E_c = \int_M \frac{v^2}{2} dm$$

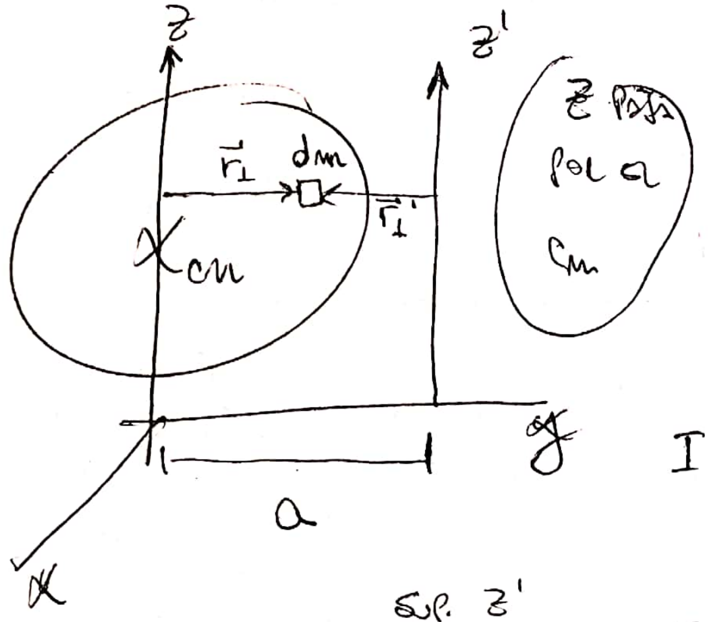
la $\vec{v}$ de cada dm cumple $\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$ (resp. de $\vec{v}_0$)

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_0^2 + |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 + 2 \vec{v}_0 \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} v_0^2 \int dm + \frac{1}{2} \int_M \underbrace{|\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2}_{= \Omega^2 r_\perp'^2} dM + \vec{v}_0 \cdot \int_M (\vec{\Omega} \times \vec{r}') dm =$$

$r'_\perp = (r' \operatorname{sen} \theta)^2$ (comp. de $\vec{r} \perp$ a $\vec{\Omega}$)

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M v_0^2}_{E_{c\,tras}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Omega^2 \int_M r_\perp^2 dm}_{\frac{1}{2}\Omega^2 I_0 = E_{c\,rot}} + \underbrace{\vec{v}_0 \int_M \vec{\Omega} \times \vec{r}' dm}_{= \text{roto-traslación}} \quad (I)$$



$$r_\perp^2 = x^2 + y^2$$

$$r_\perp'^2 = x^2 + (y-a)^2$$

$$I_z = \int_M (x^2+y^2)\,dm$$

sup. z'
está a y
(lo elijo así)

$$I_{z'} = \int_M (x^2 + (y-a)^2)\,dm$$

$$I_{z'} = \int_M (x^2+y^2-2ya+a^2)\,dm = \int_M (x^2+y^2)\,dm + a^2\int_M dm -$$

$$\underbrace{-2a\int_M y\,dm}_{-2a\,M\,y_{cM} = 0} = I_z + M a^2$$

z pasa por el cm.

Casos sencillos

1) $O \equiv CM \Rightarrow \vec{v}_O = \vec{v}_{CM}$

En este caso $E_{C\,ROT} = 0$ pues $\vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\int_M \vec{\Omega} \times \vec{r}\,' \, dm}_{= \vec{\Omega} \times \underbrace{\int_M \vec{r}\,' \, dm}_{}} = 0$

$\vec{r}\,'_{CM} \equiv 0$ pues se suman todos los $\vec{r}\,'$ resp. al CM que está definido como el "centro" geom. en un cuerpo homog.

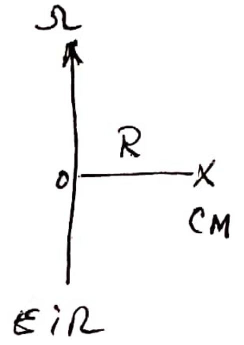
$$\Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2} \quad \text{(II)}$$

2) Si $\exists$ un EIR y O $\in$ al eje $\Rightarrow \vec{v}_O = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2} I_O \Omega^2} \quad \text{(III)}$$

Notar q' (I), (II) y (III) son exp. $\neq$ p/la misma E_C (tomando $\neq$ ptos de ref).

Es sencillo verlo con (II) y (III):



En este caso $v_{CM} = \Omega R$ $(\vec{v}_O = 0)$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} M (\Omega R)^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(I_{CM} + MR^2)}_{} \Omega^2$$

(T. Steiner)

I_O

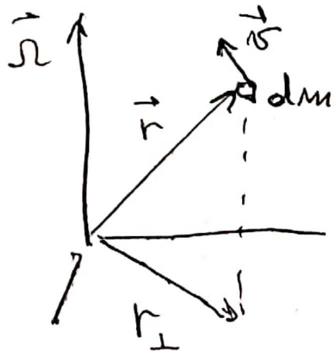
$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} I_O \Omega^2 \checkmark$$

Notar q' p/un CR $W_{NC}^{int} = 0$ siempre, pues $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cte$

$\Rightarrow$ sólo puede haber desplaz. $\perp$ a $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

IMPULSO ANGULAR DE UN CR

DADO Q' BUSCAMOS DESCRIBIR LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN, EL IMP. ANG. SERÁ DE FUNDAMENTAL IMPORTANCIA.



ELIJO EL SIST. tq $\vec{\Omega} \parallel$ AL EJE $\hat{z}$

RESPECTO DEL ~~EJE~~ EJE $\parallel$ A $\vec{\Omega}$ EL IMP. ANG. DE dm ES:

$$d\vec{L}_\Omega = \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

PERO DADO Q' dm ROTA ALR. DE $\vec{\Omega}$, $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ Q' REEMP. EN

USAREMOS LA SIG. IDENTIDAD: $\underset{\vec{r}}{\vec{A}} \times (\underset{\vec{\Omega}}{\vec{B}} \times \underset{\vec{r}}{\vec{C}}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$$\Rightarrow d\vec{L}_\Omega = \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \underset{\substack{\text{SÓLO ME} \\ \text{IMPORTA } \vec{r}_\perp \\ \text{EN EL PROD. VECTORIAL}}}{\vec{r}})\, dm = \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_\perp)\, dm$$

$$\Rightarrow d\vec{L}_\Omega = \vec{\Omega}\cdot\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r}_\perp)}_{\substack{\text{PROY DE } \vec{r} \\ \text{SOBRE } \vec{r}_\perp \\ \text{AL CUADRADO} \\ \Rightarrow r_\perp^2}} - \vec{r}_\perp\cdot\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{\Omega})}_{r_\parallel \cdot \Omega} \quad ; \quad \begin{array}{l} r_\perp = \text{COMP. DE } \vec{r} \perp \text{ A } \vec{\Omega} \\ r_\parallel = \text{COMP DE } \vec{r} \parallel \text{ A } \vec{\Omega} \end{array}$$

INTEGRANDO:

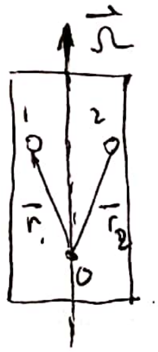
$$\vec{L}_\Omega = \vec{\Omega} \underbrace{\int_M r_\perp^2\, dm}_{I_\Omega} - \Omega \int_M r_\parallel \cdot \vec{r}_\perp\, dm$$

$$\longrightarrow \boxed{\underset{\parallel \vec{\Omega}}{\vec{L}_\Omega = I_\Omega \vec{\Omega}} - \underset{\perp \vec{\Omega}}{\vec{L}_\perp}}$$

O SEA Q' $\vec{L}_\Omega$ NO ES $\parallel \vec{\Omega}$ SALVO Q' $\vec{L}_\perp = 0$

En algunos casos (esos vemos) $\vec{L}_\perp = 0$ (14)

1) Sup. un cuerpo homog. y con alguna simetría y el eje de rot. coincide con el eje de simetría



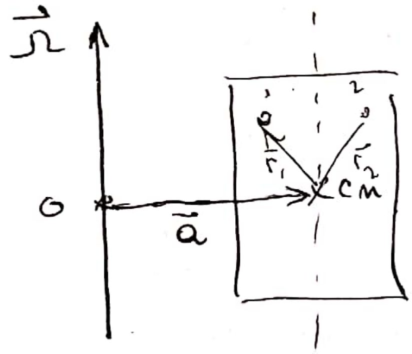
Ω es $=$ p/ambos

$r_{1\parallel} = r_{2\parallel}$

$r_{1\perp} = -r_{2\perp}$

$\Rightarrow$ se cancelan de a pares $\Rightarrow \vec{L}^O_\perp = 0$

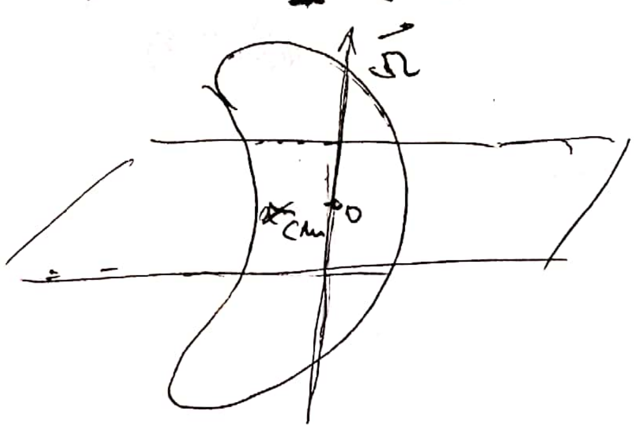
2) Si $\vec{\Omega}$ es $\parallel$ a un eje de simetría y "O" se encuentra a la misma altura q' el CM



Símil ant:

$\Rightarrow \vec{L}_\perp = 0$

3) Si $\vec{\Omega} \perp$ a un plano de simetría (se cancelan los $r_\parallel$)



$\vec{L}_\perp = 0$

4) Si el cuerpo posee "ejes principales" — suelen coincidir con las simetrías y $\vec{\Omega}$ coincide con uno de esos ejes $\Rightarrow \vec{L}_\perp = 0$

Scanned with CamScanner

(15)

Si se cumplen 1) ... 4) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{L}_\Omega = I_\Omega \vec{\Omega}}$

y en ese caso $\boxed{\dfrac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = I_\Omega \vec{\gamma} = \vec{M}^{ext}_\Omega}$ al igual q' p/un sist. de partículas.

$\Rightarrow$ P/un CR, las cond. dinámicas son:

Traslación $\longrightarrow$ $\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{cm} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

Rotación (si $\vec{L}_\perp = 0$) $\longrightarrow$ $\vec{L}_\Omega = I_\Omega \vec{\Omega}$

$\vec{M}^{ext}_\Omega = I_\Omega \vec{\gamma}$

El equilibrio ocurre cuando $\vec{F}^{ext} = 0$

$\vec{M}^{ext}_o = 0$

Pero ¿quién es o? $\rightarrow$ recordemos q' $\vec{L}_o = \vec{L}_{o'} + \vec{r}_{oo'} \times \vec{P}$ (sist. part)

y entonces $\vec{M}^{ext}_o = \vec{M}_{o'} + \vec{r}_{oo'} \times \underbrace{\vec{F}^{ext}}_{=0 \text{ (eq.)}}$

$\Rightarrow$ en eq. $\vec{M}^{ext}_o = \vec{M}^{ext}_{o'}$ ✓

o sea q' "o" puede ser cualq. punto.

Vamos a ver 2 ej:

Péndulo físico

Cualq. cr q' puede osc. libremente alr. de un eje, bajo acc. de la gravedad.

Sobre el cuerpo hay 2 fzas, $\vec{P}$ y $\vec{F_V}$

Si apartamos el CM de la vertical, los momentos de las $\vec{F}$ ext. → mov. rotación

1) $\vec{F_V} + \vec{P} = M\,\vec{a}_{CM}$ → Como ~~...~~ el mov. es de rotación alr. del eje "O" ⇒ $|\vec{a}_{CM}| = \underset{R}{|\vec{r}|}\cdot\gamma$

2) Podemos elegir dist. centros de mom.

a) CM (se mueve) → el mom. lo hace $\vec{F_V}$ (desconocida) q', si bien aparece en 1) el camino es indirecto

b) "O" → en este caso es $\vec{P}$ la q' hace momento. y ya la conocemos (mismo q', se parece al péndulo)

$$\vec{M}_O^{\,ext} = R\hat{r} \times \vec{P} = R\,\hat{r} \times \left(P\cos\theta\,\hat{r} - P\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}\right) = -RP\,\text{sen}\,\theta\,\hat{z}$$

Como "O" está quieto. ⟶ $\vec{M}_O^{\,ext} = I_O\,\vec{\gamma}$

$$\Rightarrow -RP\,\text{sen}\,\theta\,\hat{z} = I_O\,\vec{\gamma} \longrightarrow \vec{\gamma} = \ddot{\theta}\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{RP}{I_O}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$

idem. osc. arm. si $\text{sen}\,\theta \approx \theta$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Rmg}{I_O}\,\theta = 0 \longrightarrow \text{M.A.S.}}$$

(10)

El periodo de este MAS es $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_O}{Rmg}} =$ (17)

$$= 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + mR^2}{Rmg}}$$ ⇒ Cuanto + alejado esté el cm de O, mayor será el T

c) $\vec{M}_O^{ext} = 0$ sii $O \equiv cm$ posic. de equilibrio

Supongamos que queremos obt. $\vec{F}_V$ → necesitamos $\vec{a}_{cm}$ y por lo tanto

$$\vec{v}_{cm} = \underset{\vec{v}_0 \equiv 0}{\vec{\Omega}} \times R\hat{r} = \omega\hat{z} \times R\hat{r} = \omega R\hat{\theta}$$

$(\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\Omega}\times\vec{r})$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \dot{\omega}R\hat{\theta} + \omega R\underset{-\dot{\theta}\hat{r}}{\dot{\hat{\theta}}} = \gamma R\hat{\theta} - \omega^2 R\hat{r}$$

Con la a', volviendo a 1) ⟶ $\hat{r}$) $F_{V_r} + mg\cos\theta = -mR\omega^2$

$\hat{\theta}$) $F_{V_\theta} + mg\,\text{sen}\,\theta = \gamma R m$

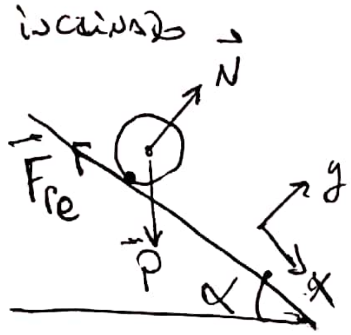
y usando la soluc. p/ $\theta(t)$ y a' $\omega = \dot{\theta}$

$$F_{V_r} = -mg\cos\theta\left(1 + \left(\frac{mR^2}{I_o}\right)^2\cos\theta\right)$$

$$F_{V_\theta} = mg\,\text{sen}\,\theta\left(1 - \frac{mR^2}{I_o}\right)$$

Dinámica de la rodadura

Sup. un CR cilíndrico que rueda sin deslizar por un plano inclinado



Vimos q' la condición de rodadura

$$① \ \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_0) \quad (\vec{v}_0 = 0)$$

(i)

las ec. dinámicas son:

$$② \begin{cases} P \,\text{sen}\,\alpha - F_{re} = m\, a_{CM} \ \text{(ii)} \\ N - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

No desliza ⟹ $\boxed{\text{su valor no se conoce} \ \to \text{incógnita}}$

la ec. de momentos puede referirse a "o" o al "CM"

uso "o":

$$③ \ M_0^{ext} = R\hat{y} \times \underbrace{mg(\text{sen}\,\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y})}_{\vec{P}} = -mgR\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{z} \ \text{(iii)}$$

$\vec{N}$ no hace torque porque está en $\hat{y}$

$\vec{F}_{re}$ " " " " " aplicada en "o"

$$\Rightarrow -mgR\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{z} = I_0\,\vec{\gamma} \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = -\frac{mgR\,\text{sen}\,\alpha}{I_0}\,\hat{z}}$$

En principio tengo 3 ec. (i) (ii) (iii) y $\vec{\gamma}, a_{CM}, F_{re} \to$ 3 incógnitas ✓

DADO Q' POR (1) $\vec{v}_{CM} = -\omega R \hat{x} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = -\gamma R \hat{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{m g R^2 \operatorname{sen}\alpha}{I_0} \hat{x}}$$

DE (2) PODEMOS OBTENER F_{Re}:

$$F_{Re} = m g \operatorname{sen}\alpha - m\, a_{CM} = m g \operatorname{sen}\alpha \left(1 - \frac{m R^2}{I_0}\right)$$

RECORDEMOS QUE $I_0 = I_{CM} + m R^2$, CON LO Q' $\boxed{F_{Re} = \frac{m g \operatorname{sen}\alpha\, I_{CM}}{I_0}}$

UNO PODRÍA IR + ALLÁ Y BUSCAR LA COND. tg EL CR NO DESLICE:

PARA ESO $\longrightarrow$ $0 \leq F_{Re} \leq \mu_e N = \mu_e m g \cos\alpha$

$$\Rightarrow 0 \leq m g \operatorname{sen}\alpha \frac{I_{CM}}{I_0} \leq \mu_e m g \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha \leq \mu_e \frac{I_0}{I_{CM}}}$$

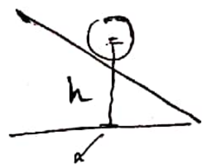
VEAMOS EL PROBLEMA DESDE EL PUNTO DE VISTA ENERGÉTICO:

SI BIEN F_R ES NO CONS., AL ESTAR APLICADA SOBRE UN PUNTO CON $v = 0$, NO REALIZA TRABAJO. $\Rightarrow E_M = cte$

PLANTEAMOS ENTONCES EL PROBLEMA, COMO UNA TRASLACIÓN CON $\vec{v}_{CM}$ Y UNA ROT. ALR. DEL CM.

a) $E_a = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + m g h_{CM}$

No hay término rot - trasl



$E_{ROT} = 0$

b) Si lo consideramos como una rot. pura alr. de "O" tampoco hay término roto - trasl.

y $E_b = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + m g h_{CM}$

obviamente E a) = E b) ($v_{cm} = \omega R$ y $I_O = I_{cm} + mR^2$)

De E_b, se ve q' ω no es cte (h_{cm} va disminuyendo)

Notar q' si el $\alpha = 0 \Rightarrow$ la única F_{ext} es F_{re}, que no realiza trabajo, con lo que $\vec{v}_{cm}$ y por lo tanto ω, deben ser ctes, entonces $\gamma = 0 \Rightarrow$ ~~$\vec{M}^{ext}_{CM}$~~ 0 ninguna fuerza ext. realiza momentos, lo q' implica que $F_{re} = 0$

$\rightarrow$ En gral., cualquier CR q' rota alr. de un eje // a un eje principal, sin momentos externos, se mueve con $\omega =$ cte

$\rightarrow$ Ley de inercia para el mov. de rotación