Potencial Gravitatorio

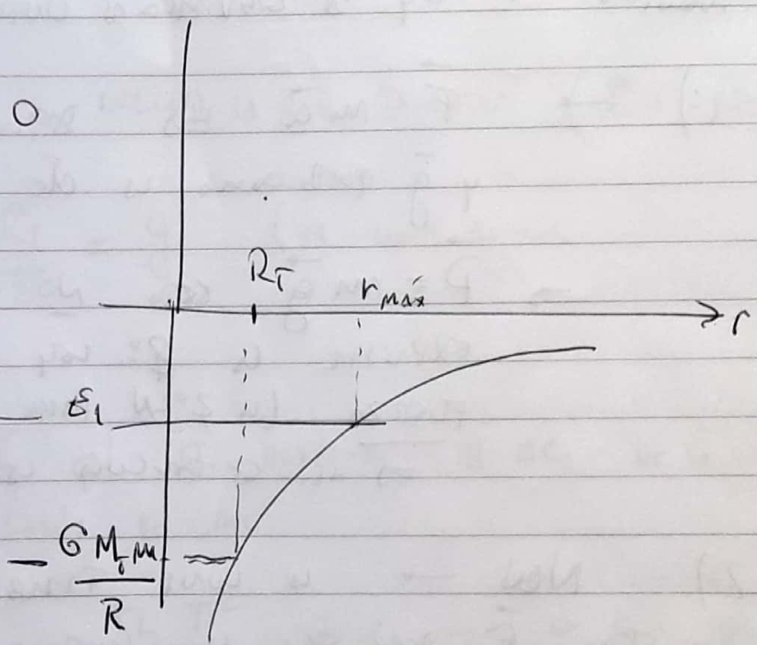
$$V(r) = -\frac{G M_T m}{r} \quad (r \geq R_T)$$

M_T

R_T

m = objeto satélite puntual

$$V(r \to \infty) = 0$$



El objeto tiene un punto de retorno ($r_{máx}$) y vuelve a la sup.

Si $E \geq 0$ el obj. puede mov. en $R_T \leq r \leq \infty$ (no ligado)

Con esa energía el obj. llega a $r \to \infty$ con $v = 0$ (si $E > 0 \Rightarrow$ llega con $v > 0$)

Para $E = 0$, el móvil tendrá la mín. veloc. para salir de la atracc. grav $\Rightarrow v_{escape}$

$$E = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = 0$$

$$\Rightarrow v_E = \left(\frac{2 G M_T}{R_T} \right)^{1/2}$$

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Galileo → $\vec{g}$ cerca de la sup (despreciando roz aire)

indep. de su tamaño / masa

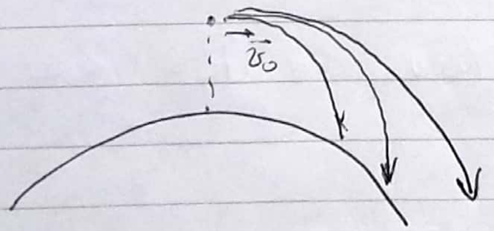
Newton → ley de gravitación universal

1º) → $\vec{F} = m\vec{a}$ ⇒ define $\vec{P} \propto m$

y $\vec{g}$ queda como la cte de prop.

⇒ $\vec{P} = m\vec{g}$ esto NO es otra forma de expresar la 2ª ley, es la def. de una fuerza (la 2ªLN parte de q' conocida la $\vec{F}$ ⇒ así se calcula la $\vec{a}$)

2º) NW → la luna tamb. debe ser atraída y esa $\vec{F}$ debe ser la causa de su movimiento.



NW: tiro oblicuo

si aumento $\vec{v_0}$, en algún momento la piedra, a pesar de caer, nunca encuentra la superficie.

⇒ giro alr. de T → esta fue la idea de x qué la luna realiza ese mov.

Si fuera un MCU → $a_L = \frac{v_L^2}{r_L}$ (ac. centrípeta)

r_L → radio órb. luna desde centro Tierra

Si T_L = período $\Rightarrow v_L = r_L \omega_L = r_L \frac{2\pi}{T_L}$

$$\Rightarrow a_L = \frac{4\pi^2 r_L}{T_L^2}$$ → ac. centrípeta de la luna

Para una piedra, cerca de la sup. terrestre (en R_T)

$$a = \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} = g$$ (ya lo sabemos

⇒ Newton pensó q' el cociente de ac. de la luna y la piedra sería de ahí

$$\frac{a_L}{a} = \frac{r_L T^2}{R_T T_L^2} \neq 1$$ → o sea q' la aceleración depende de la dist. a la superficie ó al centro de la Tierra

3º → a esa altura se conocían las leyes de Kepler.
. Kepler sabía q' las órb. de los planetas → elípticas
y la 3º dice q' el cuadrado del período de la órbita de un planeta es $\propto$ al cubo del semi eje mayor de la órb. elíptica.

$$T^2 \propto R^3$$

Newton supuso q' se debía cumplir la misma relac.
(es como pensar q' las órb. son $\approx$ circulares)

$$\Rightarrow \quad \frac{T^2}{T_L^2} = \frac{R_T^3}{r_L^3}$$ q' si reemplazo en el coc. de $\frac{a_L}{a}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_L}{a} = \frac{R_T^2}{r_L^2} \quad \Rightarrow \quad a_L \, r_L^2 = g \, R_T^2 = cte$$

$a \downarrow g$

a_L: es como g_L en la luna

$\Rightarrow$ Generalizó $g(r) = \frac{cte}{r^2}$; $r \equiv$ dist. al centro de la Tierra.

$\Rightarrow$ ¿Cuál es el "peso" de la luna?

$$F_{TL} = m_L \, g_L = m_L \frac{cte}{r_L^2}$$

Además, la 3° LN $\longrightarrow$ $F_{TL} = - F_{LT}$

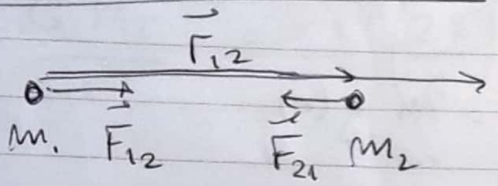
$$\Rightarrow \quad \frac{cte \; m_L}{r_L^2} = - \frac{cte' \, M_T}{r_L^2}$$

$$\Rightarrow \quad F \propto m_L \; , \; \propto m_L \; , \; \propto \frac{1}{r_L^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_{LT} \propto \frac{m_L \, M_T}{r_L^2}$$

En base a esta expresión, Newton generalizó:

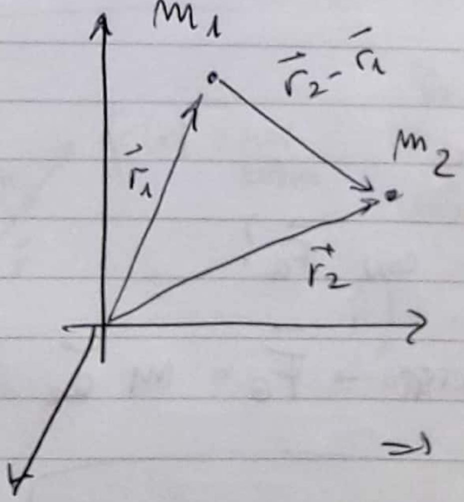
La ley de gravitación universal



$$\vec F_{12} = \frac{G\, m_1\, m_2}{r_{12}^2}\, \hat r_{12} = -\vec F_{21}$$

con $G = 6{,}672 \times 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg\, seg^2}$ constante de gravit. universal.

En general:



F sobre 2 debida a 1

$$\vec F_{21} = \underset{\text{atractiva}}{-}\frac{G\, m_1\, m_2}{|\vec r_2 - \vec r_1|^2}\, \underbrace{\frac{(\vec r_2 - \vec r_1)}{|\vec r_2 - \vec r_1|}}_{\hat r_{12}}$$

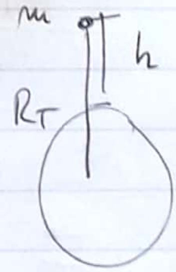
$$\Rightarrow \vec F_{21} = -\frac{G\, m_1\, m_2}{|\vec r_2 - \vec r_1|^3}\,(\vec r_2 - \vec r_1)$$

$m_1 \equiv$ Fuente ; $m_2 \equiv$ Campo (según cuál "aplica" y cuál "recibe")

Obviamente es recíproco

UN OBJETO EN LA SUP. DE LA TIERRA (R_T)

Ó A UNA ALT. $h << R_T$:



$$\longrightarrow \quad \vec{F} = -\frac{G m M_T}{r^2} = m\, g(r)$$

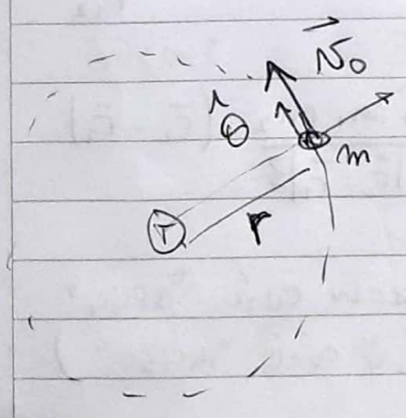
$$r = R_T + h$$

SI $h << R_T$ PODRÍA DESPRECIARLO Y ENTONCES $g = -\frac{G M_T}{R_T^2}$

SI h ES GRANDE, PUEDO HACER UN DESARROLLO DE TAYLOR DE $\frac{1}{R_T + h}$ Y ANALIZAR LA CORRECCIÓN, Ó SIMPLEMENTE USAR R_T

Proyectil en órbita circular

¿PUEDE DARSE UN MCU CON $\vec{F}_G$?



NECESITO $\rightarrow \vec{F}_G = m\, \vec{a}_c$

$\hat{r}$) $\boxed{-\frac{G M_T m}{r^2} = -m \frac{v_0^2}{r}}$

$\hat{\theta}$) $a_T = 0 \Rightarrow \omega = cte = \frac{v_0}{r}$

$$\boxed{\frac{G M_T}{r} = v_0^2}$$

Usando ω y $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ (τ p/no conf. con T)

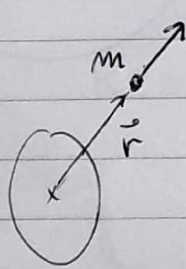
$$\Rightarrow \frac{G M_T}{r} ;= r^2 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 .$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G M_T}}$$

III Ley de Kepler

Notar q' p/cada v_0 $\exists !$ r para la órbita, que obviamente determina el período de giro.

Proyectil "vertical"



$\vec v(r)$ $\equiv$ mov. radial

Dado q' su aceleración depende de r, planteo una $\vec v(r)$ también

$$\hat r) \quad - \frac{G M_T m}{r^2} = m \ddot r$$

(el término con $\dot\theta$ se anula)

$$\Rightarrow \ddot r = - \frac{G M_T}{r^2}$$

Puedo pasar a $v = \dot r \longrightarrow \ddot r = \frac{d\dot r}{dt} = \frac{d\dot r}{dr}\frac{dr}{dt}$.

$$\Rightarrow \dot r \frac{d\dot r}{dr} = - \frac{G M_T}{r^2}$$

QUE INTEGRANDO A AMBOS LADOS:

$$\int_{v_0}^{v} \dot{r}\, d\dot{r} = \int_{r_0}^{r} -\frac{GM_T}{r^2}\, dr$$

$$\longrightarrow \frac{v^2(r) - v_0^2}{2} = -GM_T\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{v(r) = \left(v_0^2 - 2GM_T\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right)^{1/2}}$$

SI SALE DE LA SUPERFICIE $\Rightarrow$ $r_0 = R_T$

NOTAR Q' ~~LA RAÍZ~~ EL RADICANDO NO PUEDE SER < 0 $\Rightarrow$ SI ESTO OCURRE, NO $\exists$ v_0 t.q. SE PUEDA LLEGAR A ESE r

Y ADEMÁS PUEDO CALCULAR LA ALT. MÁX. (r_M)

PIDIENDO $v(r_M) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{r_M = \frac{R_T}{1 - \frac{v_0^2 R_T}{2G M_T}}}$$

CON ESTO PODEMOS RE OBTENER LA v_{ESCAPE}, PIDIENDO Q' $v(r_M \to \infty) = 0$

$$v_0 = \left(2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_M}\right)\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow v_{0E} = \left(\frac{2GM_T}{R_T}\right)^{1/2}$$ AL IGUAL Q' USANDO ENERGÍA.

GRAVITACIÓN

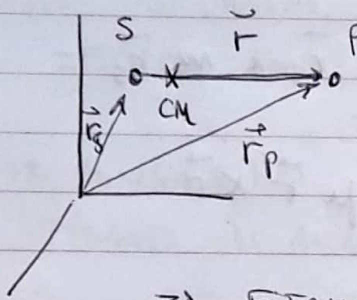
~~[illegible]~~ (2ª PARTE) (5)

PROBLEMA DE KEPLER

(M) (m)

PROBL. DE 2 C. INTERACTUANTES → SOL + PLANETA

VAMOS A CONSIDERARLO AISLADO (RESP. LA INTERACCIÓN DE OTROS OBJ. CELESTES)



EN ESE CASO VIMOS Q' LA v_{CM} = cte RESP. DE UN SISTEMA INERCIAL

⇒ FIJAMOS NUESTRO SREF. EN EL CM

VAMOS ENTONCES A PLANTEARLO COMO HACÍAMOS, P/UN SIST. DE 2 C.

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_S$$

$$R = \frac{M\vec{r}_S + m\vec{r}_P}{M+m} = 0$$ → ES EL ORIGEN DE MI SREF.

EN ESE CASO $\ddot{\vec{R}} = 0$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = F_{\text{de interacción}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

DONDE $\mu = \frac{mM}{M+m}$ (MASA REDUCIDA)

$$\vec{r}_P = \cancel{\vec{R}}^{\,0} + \frac{M}{m+M}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r}_S = -\frac{m}{m+M}\vec{r}$$

$$\frac{m M^2}{(m+M)^2}$$

Analicemos qué variables se conservan:

1) la F de interacción apunta al CM

$$\Rightarrow \vec{L}_{CM} = cte$$

Puedo calcular $\vec{L}_{CM}$ usando las exp. de $\vec{r}_S$ y $\vec{r}_P$ resp. de $\vec{r}$ (y $\vec{R} = 0$)

$$\rightarrow \vec{L}_{CM} = \vec{r}_P \times m \dot{\vec{r}}_P + \vec{r}_S \times M \dot{\vec{r}}_S =$$

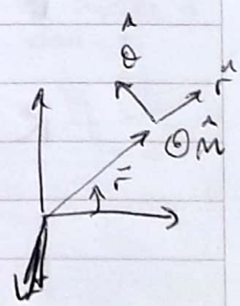
$$= \frac{m M}{m+M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Si pensamos a $\vec{r}$ como una coord. polar "radial" (recordar q' hablamos de una partícula ficticia con masa μ)

$$\Rightarrow \vec{r} = r \hat{r} \quad y \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{CM} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{m}}$$

perpendicular a $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$



Dado q' $\vec{L}_{CM} = cte$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \mu r^2 \dot{\theta}} = cte \quad (|\vec{L}_{CM}|)$$

y dep. de las c.i.

2) Comentario: las fuerzas $\vec{F}_{PS}$ y $\vec{F}_{SP}$ no dependen "de la posición", sino de la posición relativa, entonces, por separado NO son conservativas.

Sin embargo, en el problema del sistema, $\vec{F}_{PS}$ y $\vec{F}_{SP}$ combinan sus trabajos, de tal forma que, para la masa ficticia con masa μ, la F gravitatoria sí es conservativa ((Dem. calculando el trabajo de ambas))

$$dW = \vec{F}_{PS}\, d\vec{r}_P + \vec{F}_{SP}\, d\vec{r}_S = \vec{F}_{PS}\left(d\vec{r}_P - d\vec{r}_S\right)$$

$$= \vec{F}_{PS}\, d\left(\vec{r}_P - \vec{r}_S\right) = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r}\, d\vec{r} =$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\, dr$$

$$\Rightarrow dV = \frac{GMm}{r^2}\, dr \Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

(sup. $V \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$)

$\Rightarrow E_M$ se conserva

$$E_M = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{2} M v_S^2 - \frac{GMm}{r}$$

USANDO LAS EXP. DE v_p y v_s EN FUNC. DE $\dot{\vec{r}}$

$$E_M = \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 (\dot{\vec{r}})^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 (\dot{\vec{r}})^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{1}{2} \mu |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\left(m \overbrace{\left(\frac{M}{m+M}\right)^2}^{\frac{\mu^2}{m^2}} + M \overbrace{\left(\frac{m}{m+M}\right)^2}^{\frac{\mu^2}{M^2}} = \frac{mM^2 + Mm^2}{(m+M)^2} = \mu^2\left(\frac{m}{m^2} + \frac{M}{M^2}\right) = \mu \right)$$

$$E_M = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - \frac{GMm}{r} = cte$$

y DEP. DE LAS C.I., PERO ADEMÁS SABEMOS QUE $|\vec{L}_{cm}| = l = cte$ y q' $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ o SEA q' PODEMOS EXPRESAR $\dot{\theta}$ EN FUNC. DE UNA cte y SACAMOS DE ENCIMA ESA VARIABLE.

$$\Rightarrow \boxed{E_M = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} - \frac{GMm}{r}}$$

NO APARECE θ $\rightarrow$ SE CONVIERTE EN UN PROBLEMA SOLO RADIAL.

EL TEMA ES Q' EN LA ENERGÍA HAY UN TÉRMINO Q' DEPENDE DE l ($|\vec{L}_{cm}|$)

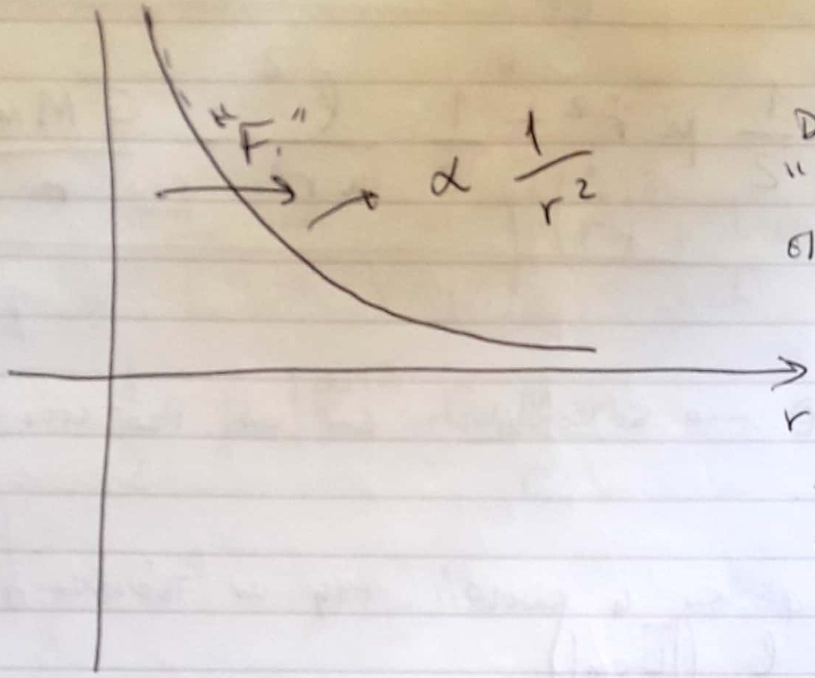
EN GRAL, PODEMOS PLANTEAR Q EN LUGAR DE TENER SÓLO EL $V_{\text{GRAVITATORIO}}$, TENEMOS UN POTENCIAL QUE DEPENDE DE r DADO POR:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} = V_{ef}(r)$$

AL Q' SE LLAMA POT. EFECTIVO.

ESTA CONTRIBUCIÓN A LA ENERGÍA JUEGA EL ROL DE UNA "ENERGÍA POTENCIAL" QUE SÓLO DEPENDE DE r Y ESTÁ FORMADA POR EL POTENCIAL GRAVITATORIO MÁS, LA FRACCIÓN DE LA E_c ASOCIADA AL MOV. EN θ.
ESTE ÚLTIMO TÉRMINO, JUEGA UN ROL DE TIPO "REPULSIVO" ~~[illegible]~~

ESTO PUEDE VERSE GRÁFICAMENTE



DADO q' LA "FUERZA" QUE ORIGINARÍA ESTE POTENCIAL SURGE DE DERIVARLO Y CAMBIARLE EL SIGNO

$\Rightarrow$ DARÍA UNA FUERZA POSITIVA

ESTO ES UNA CONSECUENCIA DE PENSARLO COMO UN PROBLEMA SÓLO EN r, SABEMOS q' NO ES ASÍ, ENTONCES EL MOV. EN θ ~~es~~ ~~ASOC~~ CORRESPONDE A MIRAR EL PROBLEMA ~~PARADOS~~ DESDE UN SISTEMA ROTANTE, ESO HACE q' APAREZCA ESTA FUERZA FICTICIA (ANÁLOGO AL COLECTIVO QUE DOBLA).

$\hookrightarrow$ "FUERZA" CENTRÍFUGA

EL MOV. SE DESCOMPONE EN:

1) TANGENCIAL CON $v_\theta = \frac{l}{\mu r}$ $\quad (v_\theta = r\dot{\theta})$

2) RADIAL CUYA ECUAC. EN r SALE DE:

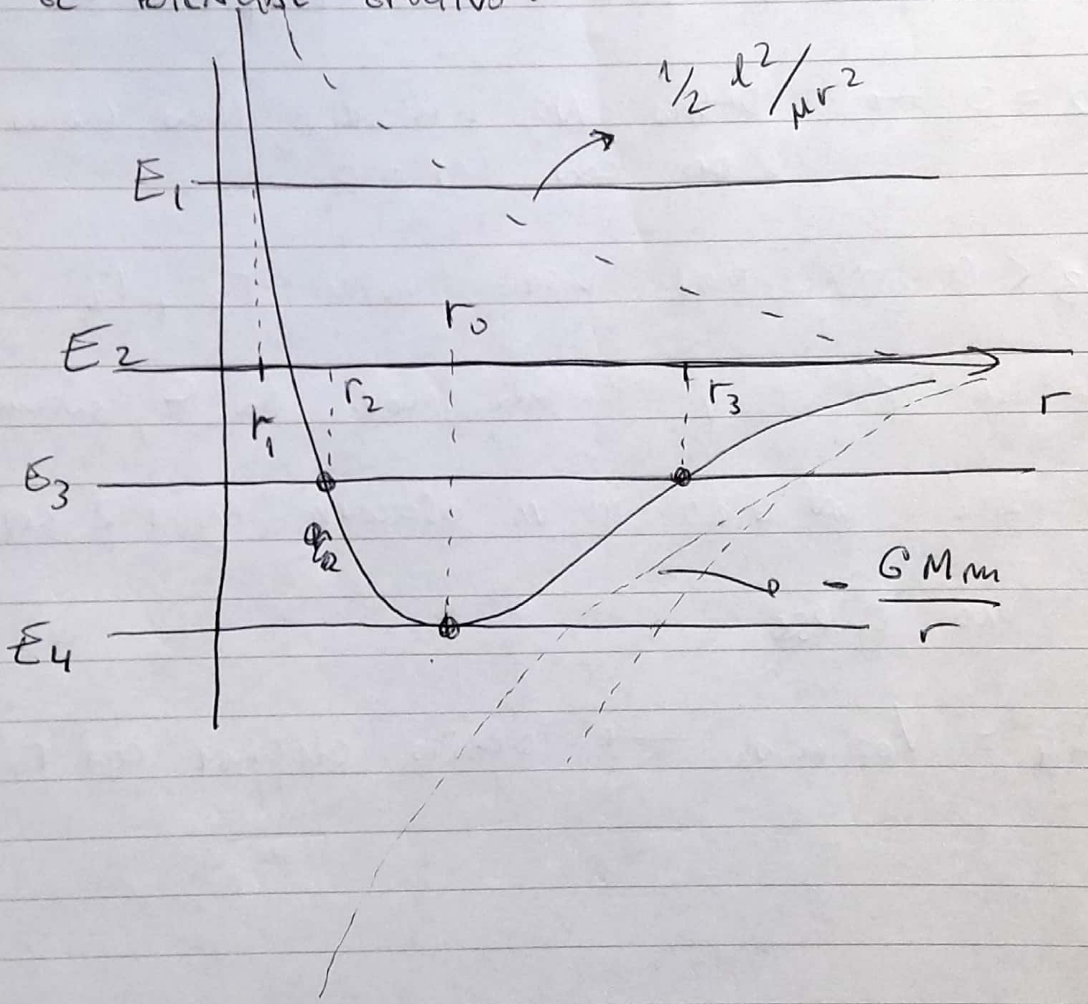
$$E_R = \cancel{d}E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} - \frac{GMm}{r}$$

$\downarrow$

cte

LAS TRAYECTORIAS ESTÁN DADAS POR LOS VALORES DE l Y E

PODEMOS ANALIZAR EL TIPO DE MOVIMIENTO GRAFICANDO EL POTENCIAL EFECTIVO:



r_0 SALE DE BUSCAR EL MÍNIMO DE V_{ef}

Y ES $r_0 = \frac{l^2}{GMm\mu}$

¿QUÉ TIPO DE MOV. VA A REALIZAR EL PLANETA?
(RECORDEMOS Q' EN GRAL, SI $M \gg m$, $\vec{r} \simeq$ 4
POSIC. DEL MÁS CHICO, YA Q' $\vec{R} \equiv 0$)

a) $E_1 > 0 \longrightarrow$ ÓRBITA NO LIMITADA
ES UN MÓVIL Q' PUEDE IR DESDE r_1 HASTA ∞

b) $E_2 = 0 \longrightarrow$ ÓRBITA NO LIMITADA, PERO LLEGA A ∞ CON $v = 0$

c) $E_3 < 0 \longrightarrow$ MOV. LIGADO ENTRE r_2 Y r_3

RECORDAR Q' ESTOY TENIENDO MOV. EN θ, ENTONCES ESTO SERÁ UN GIRO Q' VA OSCILANDO ENTRE 2 RADIOS

$\Rightarrow$ UNA ELIPSE

d) $E_4 = V_{ef\,mín.} \longrightarrow$ ÓRBITA CIRCULAR CON r_0