Teoremas de conservación

25/02

Entrega de ejercicios: Lunes 1/3
Ej: 3 y 4.

Choque elástico: se conserva → momento lineal
→ energía cinética.

En 1 dimensión:

2 ecs. y 2 incógnitas

- Cons. momento:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

- Cons. energía cinética:

$$\frac{m_1}{2} v_{1i}^2 + \frac{m_2}{2} v_{2i}^2 = \frac{m_1}{2} v_{1f}^2 + \frac{m_2}{2} v_{2f}^2$$

Solución (ver teórica):

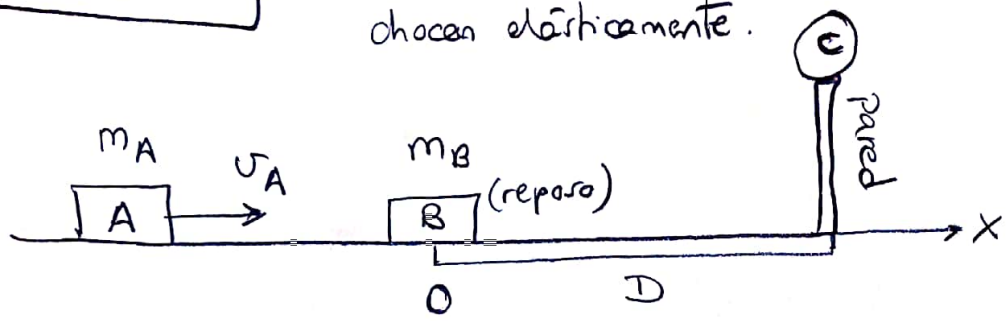
$$\boxed{\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \end{aligned}}$$

Límites: $m_1 = m_2$ → intercambian velocidades.

$m_2 \gg m_1$ → pared / mosquito.

Ejercicio 2

chocan elásticamente.



$m_A \geq m_B$

a ¿Donde chocan A y B por segunda vez?

Despues del primer choque:

$$v_{A_f} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A_i} \geq 0$$

$$v_{B_f} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A_i} \geq 0$$

Como $2m_A > m_A - m_B$

$\Rightarrow \boxed{v_{B_f} > v_{A_f}.}$

Tiempo que tarda B en chocar con la pared C:

$$T_D = \frac{D}{v_{B_f}}$$

Luego B invierte el sentido de la velocidad (pero no el módulo) y choca con A a una distancia d de C luego de un tiempo

$$T_d = \frac{d}{v_{B_f}}$$

En el tiempo $T_D + T_d$, Ⓐ recorre una distancia $D-d$.

$$\Rightarrow (D-d) = v_{Af}\cdot(T_D+T_d) = \frac{v_{Af}}{v_{Bf}}(D+d) = \frac{m_A-m_B}{2m_A}(D+d)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1-\frac{m_A-m_B}{2m_A}\right)}_{\frac{1}{2m_A}(m_A+m_B)} D = \underbrace{\left(1+\frac{m_A-m_B}{2m_A}\right)}_{\frac{1}{2m_A}(3m_A-m_B)} d$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{m_A+m_B}{3m_A-m_B} D}$$

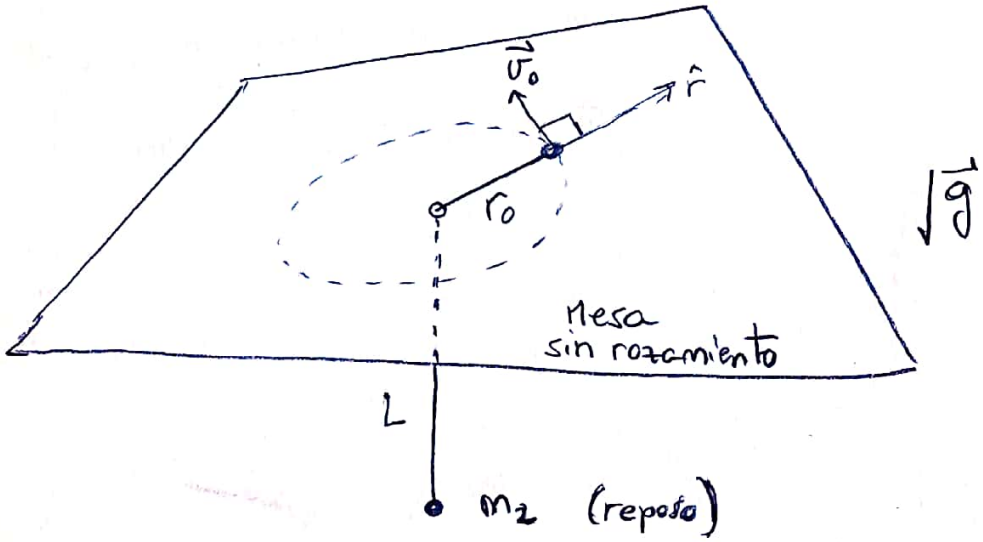
Nota: como $3m_A - m_B = m_A - m_B + 2m_A \geq m_A - m_B + 2m_B = m_A + m_B \Rightarrow \boxed{d < D}$ (esperable porque $v_{Af} > 0$).

Límites: Si $m_A = m_B \Rightarrow d = D$ porque A transfiere toda su velocidad a B ✓.

$m_A \gg m_B \Rightarrow d = \frac{D}{3}$ porque $v_{Af} \simeq v_{Ai}$

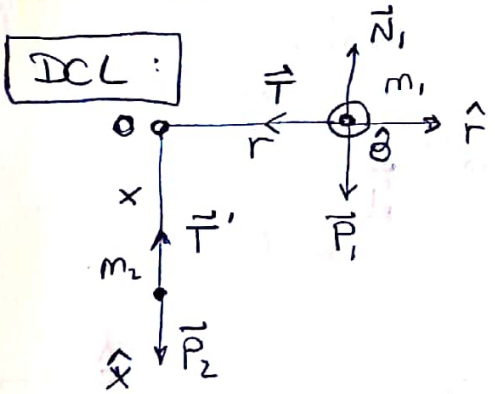
$v_{Bf} \simeq 2v_{Ai}$

Ejercicio 5



a Determinar la relación entre m_1, m_2, $|\vec{v}_0|$, r_0 y g para que m_2 permanezca en reposo.

DCL:



$$\vec{P}_1 = m_1 g \hat{x} \quad , \quad \vec{N}_1 = -\vec{P}_1$$

$$\vec{T} = -T\hat{r}$$

$$\vec{T}' = -T\hat{x}$$

$$\vec{P}_2 = m_2 g \hat{x}$$

Vínculo: $r + x = L$

Newton:

(1) $\hat{r}]$ $\quad m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$

$\hat{\theta}]$ $\quad m_1(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$

(2) $\hat{x}]$ $\quad m_2\ddot{x} = m_2 g - T$

Inicialmente m_2 está en reposo $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \dfrac{|\vec{v}_0|}{r} \end{cases}$

Para que continúe en reposo: $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$.

$$\Rightarrow \quad -m_1 r \frac{|\vec{v}_0|^2}{r^2} = -T \quad (\perp \hat{r})$$

$$0 = m_2 g - T \quad (2\hat{x})$$

$$\Rightarrow T = m_2 g \Rightarrow \boxed{m_1 \frac{|\vec{v}_0|^2}{r} = m_2 g}$$

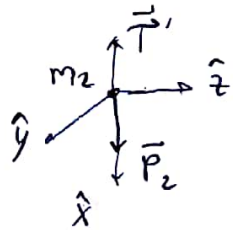
b ¿Que magnitudes se conservan?

Momento Lineal

m_1 Resultante fzas externas: No nula $= \vec{T}$, pero la componente $\hat{x}$ se anula:

$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{1x} = cte = 0}$ Está vinculada a la mesa.

m_2 Resultante de fzas externas: No nula $= \vec{T}' + \vec{P}_2$, pero las componentes perpendiculares se anulan



$\Rightarrow \boxed{P_{2y} = P_{2z} = cte = 0}$

↳ la masa 2 solo sube y baja.

$\boxed{\text{Sistema } m_1 \oplus m_2}$ Resultante de Fuerzas externas (la tensión es interna)

$\vec{T} + \vec{T}' + \vec{P}_2 \neq 0 \rightarrow$ No se conserva ninguna componente del momento.

Momento angular (respecto de O)

$\boxed{m_1}$ $\vec{M}_{1o} = r\hat{r} \times (-T\hat{r} + \cancel{\vec{N}_1} + \cancel{\vec{P}_1}) = 0 \rightarrow$ se conserva.

$\Rightarrow \vec{L}_{1o} = m_1 r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = -m_1 r^2 \dot{\theta}\hat{x} = cte$

$= \underbrace{-m_1 r_0 |\vec{v}_0| \hat{x}}_{\text{cond. iniciales}}$

$\boxed{m_2}$ $\vec{M}_{2o} = x\hat{x} \times (-T\hat{x} + m_2 g\hat{x}) = 0 \rightarrow$ se conserva

$\Rightarrow \vec{L}_{2o} = m_2 x\hat{x} \times (\dot{x}\hat{x}) = 0 \rightarrow$ no aporta nada!

$\boxed{m_1 \oplus m_2}$ $\vec{M}_o = \vec{M}_{o_1} + \vec{M}_{o_2} = 0 \rightarrow$ se conserva

$\Rightarrow \vec{L}_o = \vec{L}_{o_1} + \cancel{\vec{L}_{o_2}} = -m_1 r^2 \dot{\theta}\hat{x} = cte \rightarrow$ no aporta más info.!

Energía

m_1 Fzas no conservativas
- $\vec{N}_1$: no hace trabajo
- $\vec{T}$: hace trabajo. $dW_1 = -T \cdot dr$

No se conserva la energía.

m_2 Fzas no conservativas $\longrightarrow$ $\vec{T}'$: hace trabajo $dW_2 = -T\,dx$

No se conserva la energía.

$m_1 \oplus m_2$ El trabajo de las fzas conservativas es cero.

$$dW = dW_1 + dW_2 = -T\,dr - T\,dx = 0$$

vínculo $r + x = L$

$\Rightarrow dr = -dx$.

$\Rightarrow$ La energía del sistema conjunto se conserva. $\longrightarrow$ Única fza conservativa : peso.

$$E = \underbrace{\frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}_{\text{Energía cinética 1}} + \overbrace{\frac{m_2}{2}\dot{x}^2}^{\text{Energía cinética 2}} \underbrace{- m_2 g (x - L)}_{\text{Energía potencial gravitatoria}} = cte$$

Meto el vínculo en la energía : $r + x = L \Rightarrow \begin{cases} r = -(x-L) \\ \dot{x} = -\dot{r} \end{cases}$

$$E = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{m_2}{2}\dot{r}^2 + m_2 g r$$

$$= \frac{(m_1+m_2)}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2} r^2\dot{\theta}^2 + m_2 g r$$

$$= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r$$

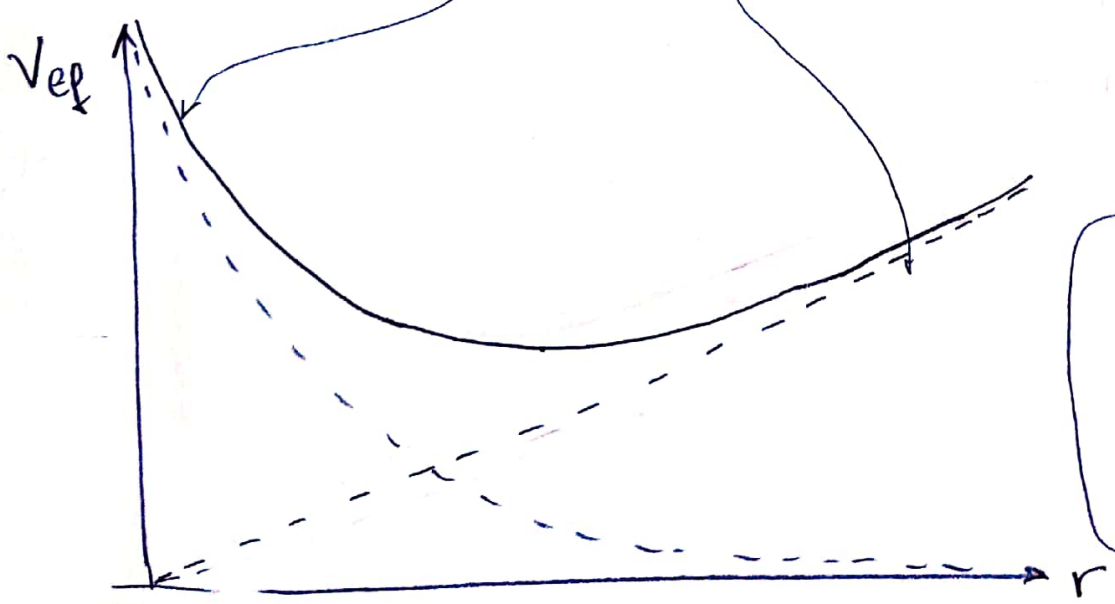
Conservación de momento angular $\vec{L}_0 = -m_1 r^2 \dot{\theta}\,\hat{x} \equiv -l_0\hat{x}$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l_0}{m_1 r^2}$$

con $l_0 \equiv m_1 r_0 |\vec{v}_0|$.

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{r}^2 + V_{ef}(r)}$$

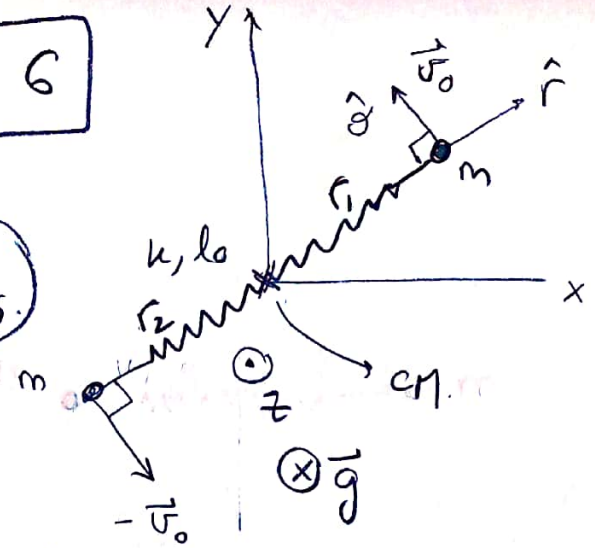
$$V_{ef}(r) = \frac{l_0^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r.$$



Mientras oscila radialmente y gira angularmente con $\dot{\theta} = \frac{r_0|\vec{v}_0|}{r^2}$

Ejercicio 6

Mesa sin rozamiento.



Inicialmente $l_{resorte} = 2l_0$

$\Rightarrow r_{1_0} = r_{2_0} = l_0$

Conservación: Momento lineal: se conserva

$\Rightarrow$ Mov. ligado a la mesa

$$\Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = cte \overset{inicial}{=} \frac{m\vec{v}_0 + m(-\vec{v}_0)}{2m} = 0$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m r_1 \hat{r} + m r_2 \hat{r}}{2m} \underset{inicial}{=} \frac{m l_0 \hat{r} - m l_0 \hat{r}}{2m} = 0.$$

$\Rightarrow \boxed{r_1 = r_2 \equiv r}$ En todo el movimiento.

Momento angular: Se conserva respecto del centro de masas. (fuerza radial)

$$\Rightarrow \vec{L}_{CM} = m r \hat{r} \times r\dot{\theta}\hat{\theta} + m(-r\hat{r}) \times (-r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$= 2mr^2\dot{\theta}\hat{z} \underset{inicial}{=} 2m l_0 |\vec{v}_0|.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{l_0 |\vec{v}_0|}{r^2}}$$

Energía: se conserva la energía del sistema. (la fza elástica es conservativa) $V = \frac{k}{2}(r_1 + r_2 - l_0)^2$

a) ¿Cual es la velocidad angular del sistema cuando $l_{res} = \frac{3}{2} l_0$?

$$l_{res} = 2r = \frac{3}{2} l_0 \Rightarrow r = \frac{3}{4} l_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{l_0 |\vec{v}_0|}{(3/4\, l_0)^2} = \frac{16 |\vec{v}_0|}{9 l_0}}$$

b) vector velocidad de cada masa en esa posición

Tengo $\dot{\theta}$, tengo $r = \frac{3}{4} l_0$, Qué falta? Cómo lo calculo?

$$E = 2 \cdot \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2}(2r - l_0)^2 = cte.$$

$$= m|\vec{v}_0|^2 + \frac{k}{2} l_0^2 \longrightarrow \text{de acá despejo } \dot{r}$$

inicial

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

Potencial efectivo:

$$E = m\dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}(2r - l_0)^2$$

$$= m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m l_0^2 |\vec{v}_0|^2}{r^2} + \frac{k}{2}(2r - l_0)^2}_{V_{ef}(r)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{l_0 |\vec{v}_0|}{r^2}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{m l_0^2 |\vec{v}_0|^2}{r^2} + \frac{k}{2}(2r - l_0)^2$$