

Importante: De esta guía se entregan los ejercicios

5, 9, 15, 18, 22, El Miércoles 10
(antes de las 14 hrs por favor).

Ejercicio 4

Un móvil (1) viaja en línea recta desde (A) hacia B

(distancia $d_{AB} = 300 \text{ km}$) a $v_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

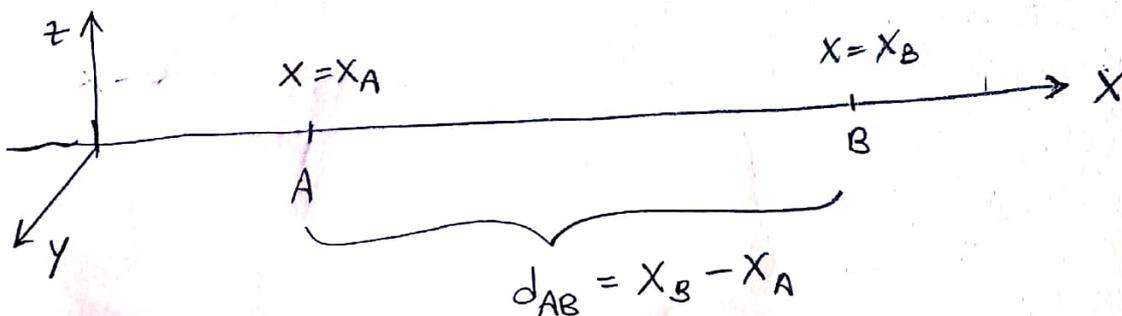
Otro móvil (2) viaja desde B hacia A a $v_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

El móvil (2) parte $H = 1 \text{ h}$ antes que el móvil (1).

a Elija un origen del tiempo y un sistema de referencia.

⊙ Origen del tiempo: $t = 0 \rightarrow$ cuando (1) pasa por A.

⊙ Sistema de referencia (movimiento unidimensional)



b) Escriba los vectores velocidad \vec{v}_1 y \vec{v}_2 de los móviles (1) y (2), respectivamente.

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$$

$$\vec{v}_2 = -v_2 \hat{x}$$

c) En un mismo gráfico represente posición versus tiempo para ambos móviles. Interprete el significado del punto de intersección de ambas curvas.

Primero encuentro la posición como función del tiempo.

$$(1) \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = v_1 \hat{x}, \quad \vec{r}_1 = x_1 \hat{x} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = v_1 = cte.$$

$$\Rightarrow dx_1 = v_1 dt \Rightarrow \int_{x_A}^{x_1} dx_1 = v_1 \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow x_1 - x_A = v_1 t \Rightarrow \boxed{x_1 = v_1 t + x_A}$$

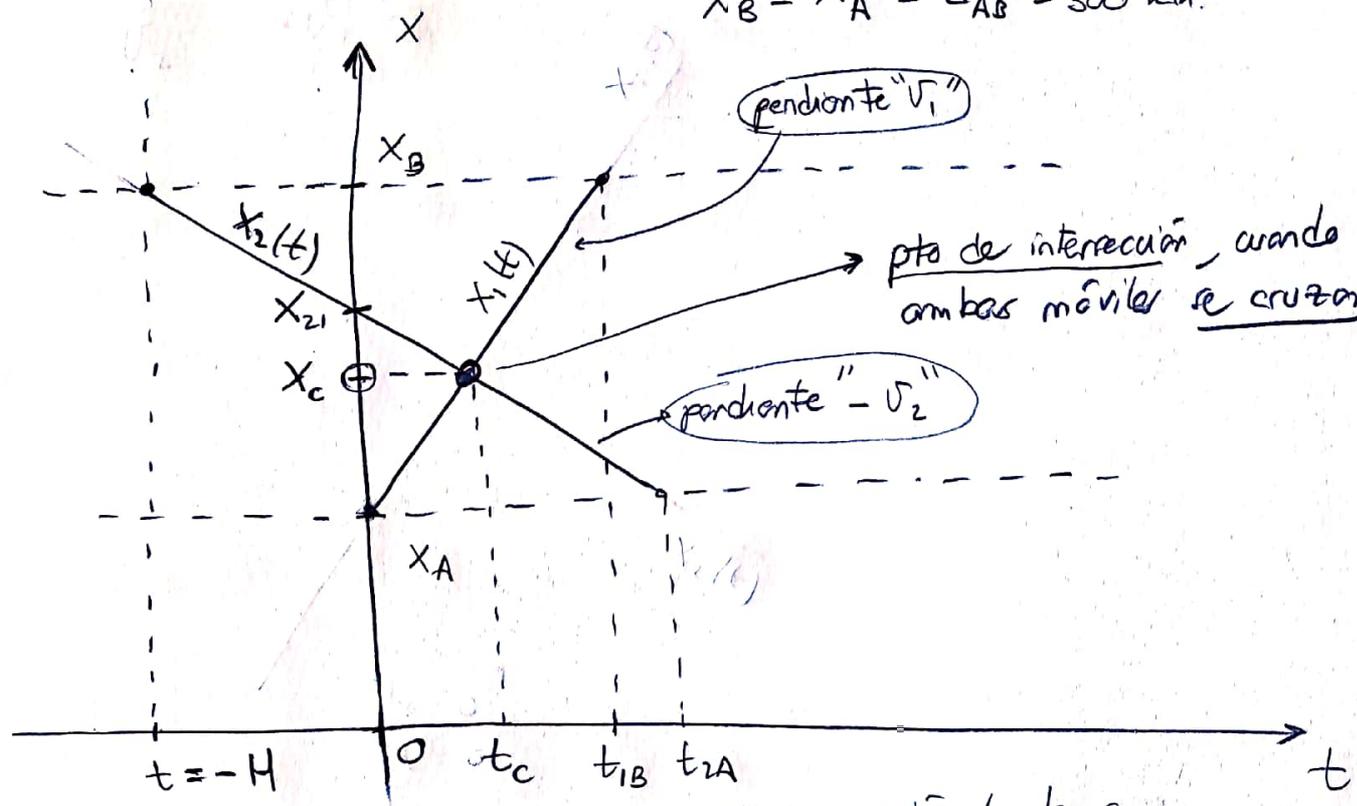
$$(2) \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = -v_2 \hat{x}, \quad \vec{r}_2 = x_2 \hat{x} \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -v_2 = cte.$$

$$\Rightarrow dx_2 = -v_2 dt \Rightarrow \int_{x_B}^{x_2} dx_2 = -v_2 \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow x_2 - x_B = -v_2(t + H) \Rightarrow \boxed{x_2 = -v_2(t + H) + x_B}$$

Posición versus tiempo:

$v_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} > v_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $H = 1\text{h}$
 $x_B - x_A = d_{AB} = 300 \text{ km}$.



x_c : posición donde se cruzan,
 t_c : tiempo en el que se cruzan.

$x_c = v_1 t_c + x_A$

$x_c = -v_2 (t_c + H) + x_B$

Resta $\rightarrow (v_1 + v_2) t_c + v_2 H + \underbrace{x_A - x_B}_{-d_{AB} \rightarrow \text{dato}} = 0 \Rightarrow$

$t_c = \frac{d_{AB} - v_2 H}{(v_1 + v_2)}$

$x_c = \frac{v_1 (d_{AB} - v_2 H)}{(v_1 + v_2)} + x_A$

Pongo números: $t_c = 1.9 \text{ h}$

$x_c = x_A + 153.85 \text{ km}$

⊙ Calculo el tiempo que tarda en llegar (1) a B

$$X_1(t_{1B}) = X_B = v_1 t_{1B} + X_A \Rightarrow t_{1B} = \frac{d_{AB}}{v_1} = 3.75 \text{ h}$$

⊙ Calculo el tiempo que tarda en llegar (2) a A

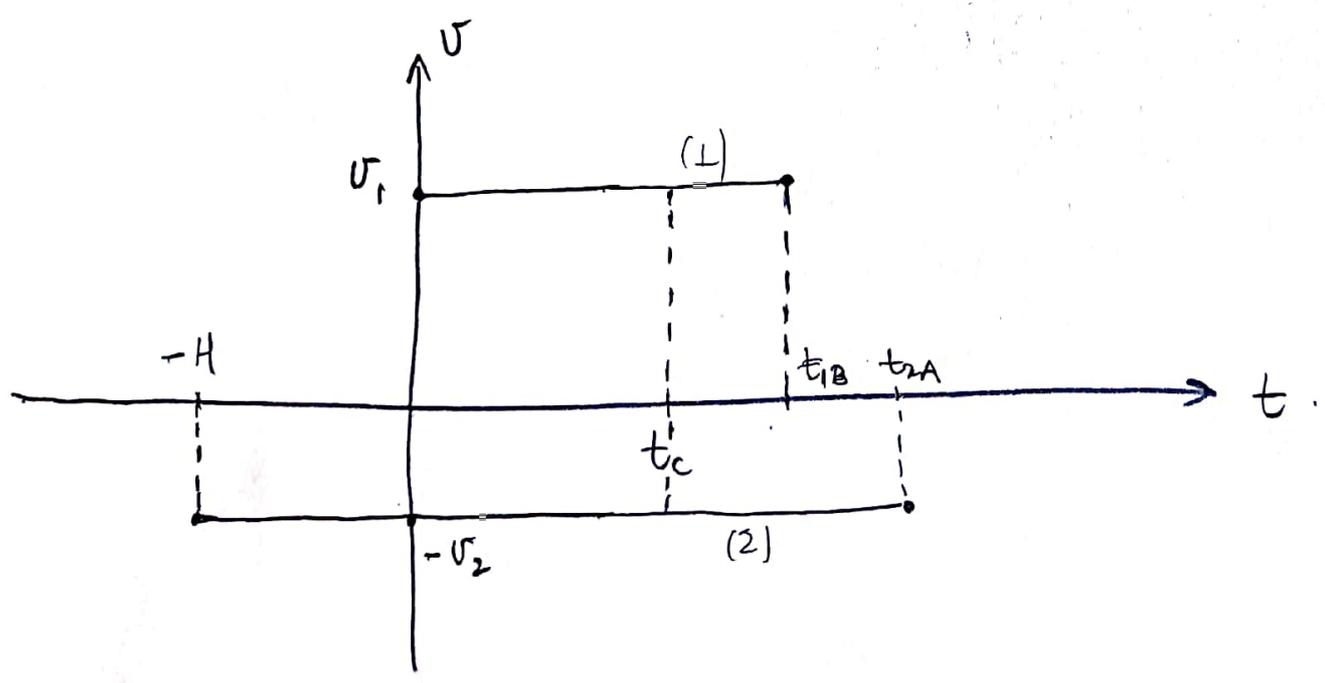
$$X_2(t_{2A}) = X_A = -v_2(t_{2A} + H) + X_B \Rightarrow t_{2A} = \frac{d_{AB}}{v_2} - H = 5 \text{ h}$$

Ojo: llega a la A 5hr, pero tarda 6 hr en llegar!

⊙ Calculo donde está (2) cuando sale (1)

$$X_2(t=0) = X_{21} = -v_2 H + X_B = X_B - 50 \text{ km}$$

d) En un mismo gráfico represente velocidad vs. tiempo para ambos móviles. ¿Cómo encontraría en el gráfico el tiempo de encuentro?



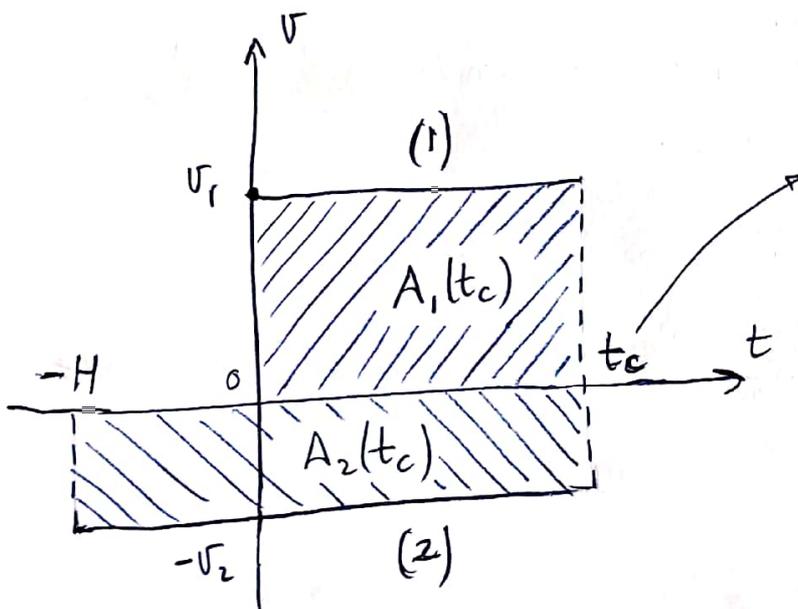
⊙ El área debajo de la recta de (1) hasta un tiempo t es: 5

$$A_1(t) = t \cdot v_1 \equiv X_1(t) - X_A \rightarrow \text{distancia recorrida por (1) desde } X_A$$

⊙ El área sobre la recta de (2) hasta un tiempo t es:

$$A_2(t) = v_2 (H + t) \equiv -X_2(t) + X_B \rightarrow \text{dist. recorrida por (2) desde } X_B$$

$$\Rightarrow A_1(t) + A_2(t) = \underbrace{X_B - X_A}_{d_{AB}} + \underbrace{X_1(t) - X_2(t)}_{\text{se anula en } t_c} \Rightarrow \boxed{A_1(t_c) + A_2(t_c) = d_{AB}}$$

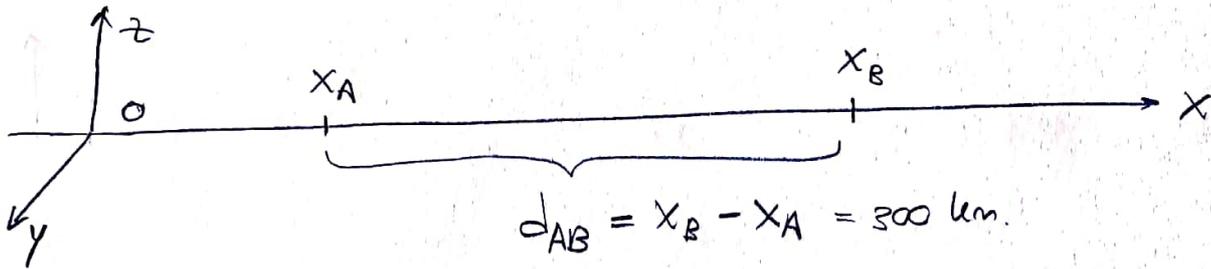


En el gráfico, el tiempo de encuentro es aquel en el que la suma de las áreas es igual a $d_{AB} = X_B - X_A$.

e) Repetir los items anteriores para el caso en que ambos viajan desde A hacia B.

6

Uso el mismo origen del tiempo [$t=0$ cuando (1) pasa x A] y sistema de referencia:



Las velocidades ahora son

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x} \quad \text{con } v_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

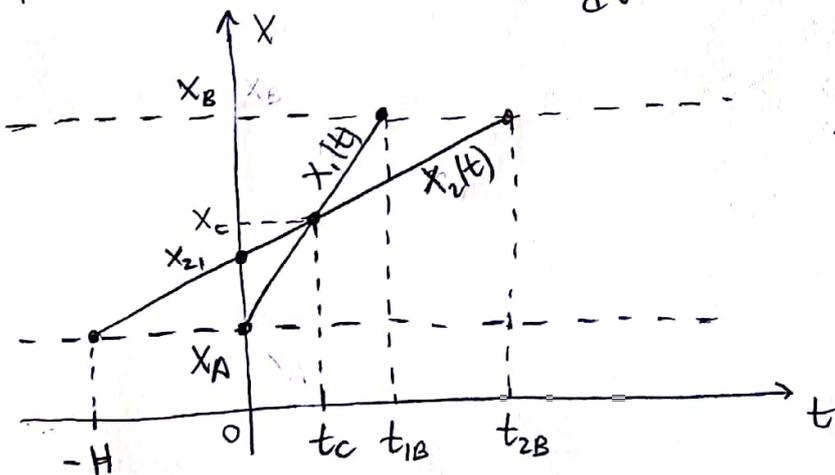
$$\vec{v}_2 = v_2 \hat{x} \quad v_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

↳ Mismo sentido!

Calculo posición versus tiempo: $x_1(t) = v_1 t + x_A$ → igual q' antes..

para (2) es distinto: $\frac{dx_2}{dt} = v_2 \Rightarrow \int_{x_A}^{x_2} dx_2 = v_2 \int_{-H}^t dt$

$$\Rightarrow x_2(t) = v_2(t + H) + x_A$$



Calcular punto y tiempo de encuentro $X_1(t) = X_2(t) \equiv X_c$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad X_c &= v_1 t_c + X_A \\ (2) \quad X_c &= v_2 (t_c + H) + X_A \end{aligned} \right\} \text{Resta: } (v_1 - v_2) t_c - v_2 H = 0$$

$$\Rightarrow t_c = \left(\frac{v_2}{v_1 - v_2} \right) H = \frac{5}{3} h$$

$$\Rightarrow X_c = \frac{v_1 v_2}{(v_1 - v_2)} H + X_A = X_A + 133.3 \text{ km}$$

Donde está (2) cuando parte (1):

$$X_{21} = X_2(t=0) = v_2 H + X_A = X_A + 50 \text{ km}$$

Cuando llegan (1) y (2) a B?

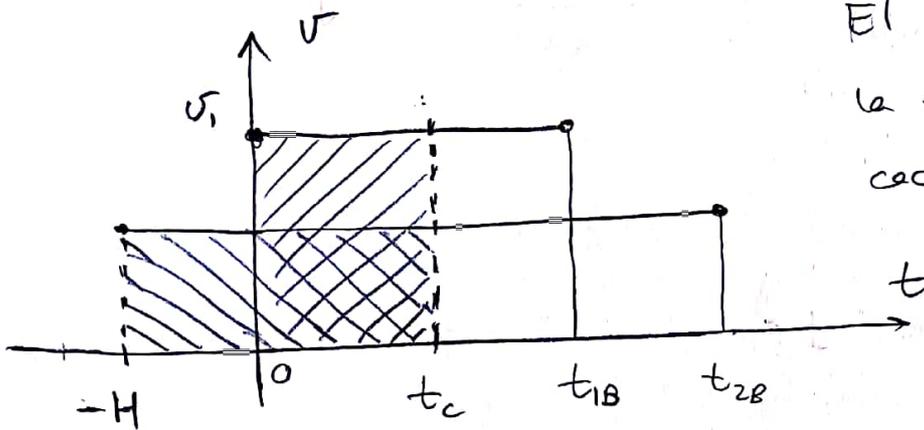
$$X_1(t_{1B}) = X_B = v_1 t_{1B} + X_A \Rightarrow t_{1B} = \frac{d_{AB}}{v_1} = 3.75 h$$

$$X_2(t_{2B}) = X_B = v_2 (t_{2B} + H) + X_A \Rightarrow t_{2B} = \frac{d_{AB}}{v_2} - H = 5 h$$

(Llega a $t = 5h$, pero tarda $6h$ desde que parte)

Velocidad vs. tiempo:

8



El área bajo cada curva es la posición desde X_A de cada móvil. t_c es el punto en el que las áreas coinciden.

$$A_1(t) - A_2(t) = v_1 t - v_2 (t + H) = 0$$

$$\Rightarrow t(v_1 - v_2) - v_2 H = 0 \Rightarrow t = \frac{v_2 H}{v_1 - v_2} = t_c \quad \checkmark$$

Ejercicio 8

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta

de acuerdo a $x(t) = -kt^3 + bt^2$ (k, b const ≥ 0)

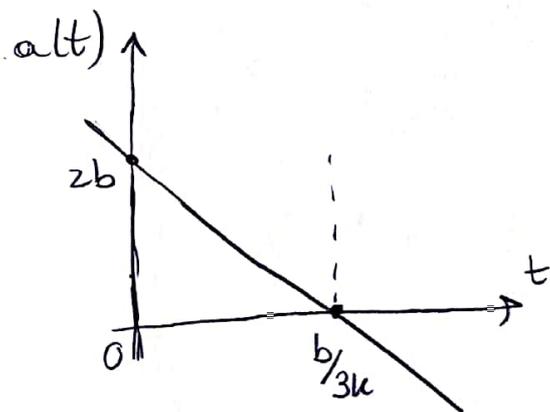
a y b Calcule la velocidad y aceleración del cuerpo en función del tiempo y grafíquelas. Dónde y cuándo tiene vel. nula?

Velocidad $v(t) = \dot{x}(t) = -3kt^2 + 2bt$

acel. $a(t) = \dot{v}(t) = -6kt + 2b$

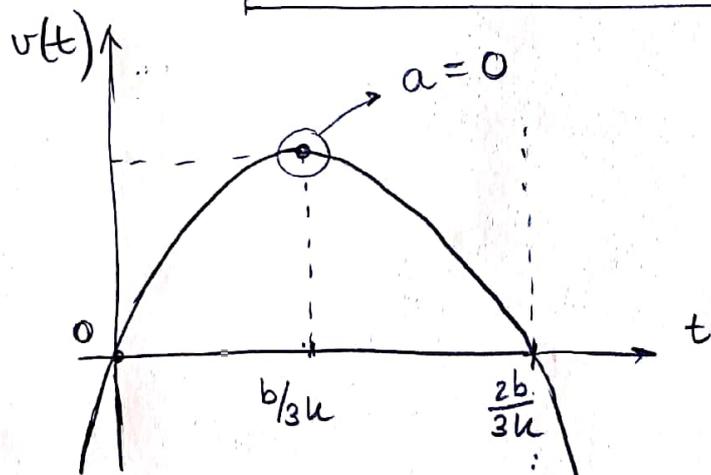
$[k] = \frac{\text{long}}{\text{tiempo}^3}$

$[b] = \frac{\text{long}}{\text{tiempo}^2}$



acel. positiva
 $t \in (-\infty, b/3k)$

acel. negativa
 $t \in (b/3k, +\infty)$



vel. neg.
 $t \in (-\infty, 0)$

vel. par.
 $t \in (0, 2b/3k)$

vel. neg.
 $t \in (2b/3k, +\infty)$

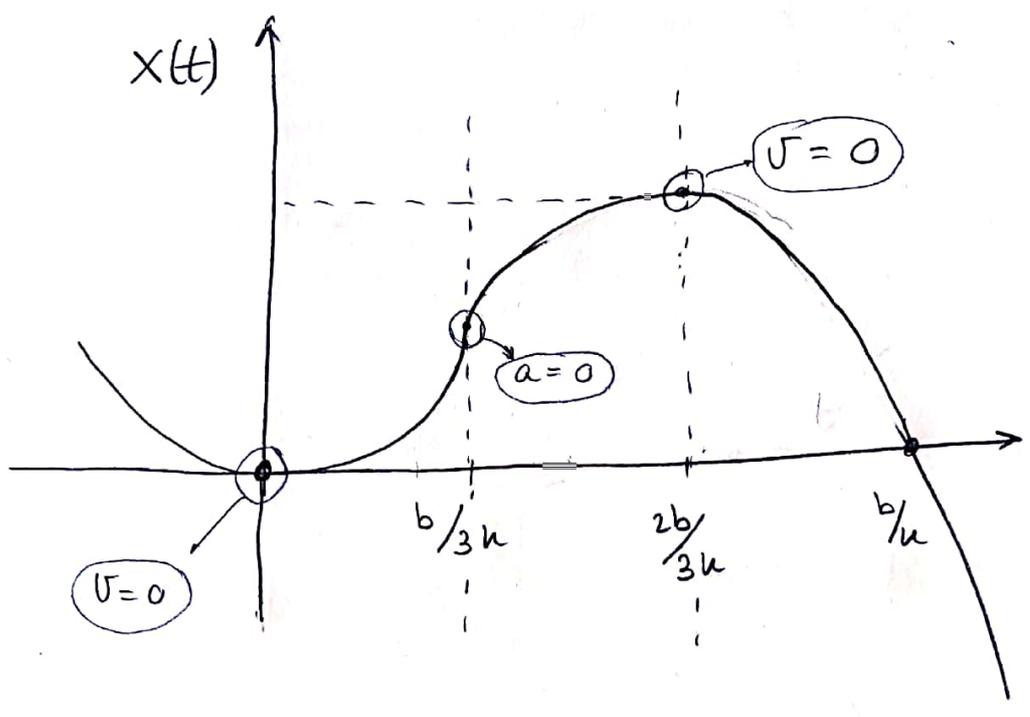
Velocidad nula: $v(t) = (-3kt + 2b)t = 0$

$t = 0$

$t = \frac{2b}{3k}$

$x(0) = 0$, $x(\frac{2b}{3k}) = -k(\frac{2b}{3k})^3 + b(\frac{2b}{3k})^2 = \frac{4}{27} \frac{b^3}{k^2}$

C) Describa cualitativamente el movimiento indicando en que intervalos de tiempo es acelerado y desacelerado.



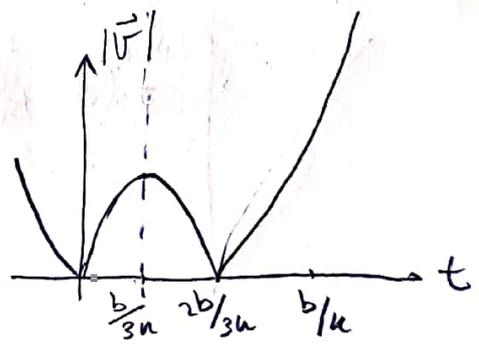
En general: $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ acelerado, $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ desacelerado.

porque $\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$

Como v^2 es monótona creciente de $|\vec{v}| > 0 \Rightarrow$

si $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \Rightarrow |\vec{v}| \text{ crece} \rightarrow \text{acelerado} \\ \vec{v} \cdot \vec{a} < 0 \Rightarrow |\vec{v}| \text{ decrece} \rightarrow \text{desacelerado} \end{array} \right.$

- En $t \in (-\infty, 0) \rightarrow v < 0, a > 0 \Rightarrow$ desacelerado.
- $t \in (0, b/3k) \rightarrow v > 0, a > 0 \Rightarrow$ acelerado.
- $t \in (b/3k, 2b/3k) \rightarrow v > 0, a < 0 \Rightarrow$ desacelerado.
- $t \in (2b/3k, +\infty) \rightarrow v < 0, a < 0 \Rightarrow$ acelerado.



Ejercicio 11

11

Un cuerpo se mueve en línea recta partiendo

a $t_0 = 0$ de $X_0 = 0$ con velocidad v_0 . Encuentre $x(t)$ para:

$$a) \quad a(t) = k \cdot t^2 \quad \text{con } k > 0 \quad (k = \text{cte}).$$

$$[k] = \frac{\text{long}}{\text{tiempo}^4}$$

$$1) \quad a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = kt^2$$

$$\rightarrow dv = \frac{dv}{dt} dt = kt^2 dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = k \int_0^t t^2 dt$$

$$\Rightarrow v - v_0 = k \frac{t^3}{3} \Big|_0^t = \frac{k}{3} t^3 \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \frac{k}{3} t^3}$$

$$2) \quad v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{k}{3} t^3$$

$$\rightarrow dx = \frac{dx}{dt} dt = \left(v_0 + \frac{k}{3} t^3 \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{k}{3} t^3 \right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = v_0 t + \frac{k}{12} t^4}$$

$$b) a = -k v^2, \quad k > 0 \quad (k = \text{cte})$$

$$[k] = \frac{1}{\text{long.}}$$

12

$$1) a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -k v^2 \Rightarrow dv = \underbrace{-k v^2}_{\frac{dv}{dt}} dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{(-k v^2)} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{k v} \Big|_{v_0}^v = t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k v} - \frac{1}{k v_0} = t \Rightarrow v(t) = \frac{1}{k \left(t + \frac{1}{k v_0} \right)} = \frac{v_0}{1 + k v_0 t}$$

2) Vuelvo a integrar:

$$v \equiv \dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \frac{dx}{dt} dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + k v_0 t} dt$$

Cambio variables: $u = 1 + k v_0 t, \quad du = k v_0 dt$

$$\Rightarrow x = v_0 \int_1^{(1+k v_0 t)} \frac{1}{u} \frac{du}{k v_0} = \frac{1}{k} \ln(u) \Big|_1^{1+k v_0 t} = \frac{1}{k} \ln(1 + k v_0 t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + k v_0 t)$$

$$c) \quad a = k v x, \quad k > 0, \quad (k = \text{cte})$$

$$[k] = \frac{1}{\text{long. tiempo}} \quad \boxed{13}$$

$$1) \quad a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \stackrel{=}{=} k v x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = k x$$

pienso que la aceleración depende del tiempo a través de la posición.

$$dv = \frac{dv}{dx} dx = k x dx$$

$$\int_{v_0}^v dv = k \int_0^x x dx \Rightarrow \boxed{v = v_0 + \frac{k}{2} x^2}$$

$$2) \quad dx = \frac{dx}{dt} dt = \left(v_0 + \frac{k}{2} x^2 \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\left(v_0 + \frac{k}{2} x^2 \right)} = \int_0^t dt = t$$

$$\sqrt{\frac{2}{k v_0}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{2 v_0}} x \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2 v_0}{k}} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{k v_0}{2}} t \right]}$$

Nota: $\operatorname{tg}(x)' = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$

(con esto puedo calcular $v(t)$ usando el resultado anterior).