

## Ejercicio 12

Un nadador puede nadar a  $v_0 = 0,7 \frac{m}{s}$  en aguas quietas.

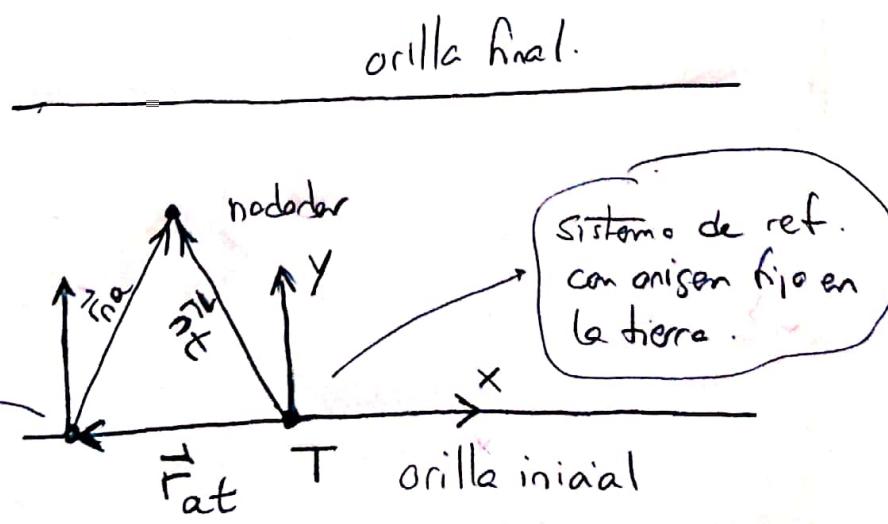
Quiere cruzar un río de  $d = 50 \text{ m}$  de ancho. La corriente del agua es  $v_a = 0,5 \frac{m}{s}$ .

- a) Para llegar al punto opuesto en la otra orilla, ¿en qué dirección debe nadar? ¿Cuanto tarda en cruzar?

El problema involucra dos sistemas de referencia respecto de los cuales se pretende describir la ubicación del nadador.

En este sistema el agua está quieta

Sistema ref. con origen solidario al movimiento del agua



x Suma de vectores:  $\vec{r}_{at} + \vec{r}_{na} = \vec{r}_{nt}$ .

(a: agua, n: nadador, t: tierra).

$$\Rightarrow \boxed{\vec{U}_{nt} = \vec{U}_{na} + \vec{U}_{at}}$$

$$\boxed{\vec{U}_{at} = -U_a \hat{x}}$$

$U_o$  es la máxima velocidad que puede tener el nadador en aguas quietas  $\Rightarrow$  En el sistema de ref. del agua.

$$\vec{U}_o = \max \{ |\vec{U}_{na}| \}$$

para llegar al punto opuesto de la orilla, debe nadar en la dirección:  $\vec{U}_{nt} = U_y \hat{y}$

Respecto del agua  $\rightarrow \vec{U}_{na} = \vec{U}_{nt} - \vec{U}_{at} = U_y \hat{y} + U_a \hat{x}$

Para que llegue lo más rápido posible  $\Rightarrow |\vec{U}_{na}| = U_o$

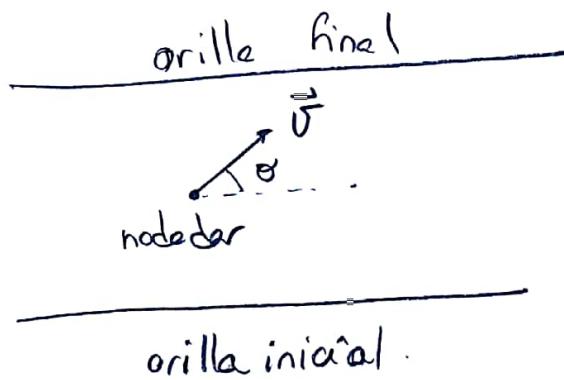
$$\Rightarrow \sqrt{U_y^2 + U_a^2} = U_o \Rightarrow$$

$$\boxed{U_y = \sqrt{U_o^2 - U_a^2} = 0,49 \frac{m}{s}}$$

$\Rightarrow$  Tarda un tiempo

$$\boxed{T = \frac{d}{U_y} = \frac{d}{\sqrt{U_o^2 - U_a^2}} = 102 \text{ s}}$$

Dirección:



$$\text{Vimar que } \vec{U}_{nt} = U_y \hat{y}$$

$$\vec{U}_{na} = U_y \hat{y} + U_a \hat{x}$$

$$\theta_t = 90^\circ$$

$$\theta_a = \arctg \frac{U_y}{U_a} = 44.4^\circ$$

b) Para cruzar en el menor tiempo posible

¿En qué dirección debe nadar? ¿A qué punto llegará?

En el sistema del agua, debe maximizar su velocidad en  $\hat{y}$ .

$$\Rightarrow \vec{U}_{na} = U_o \hat{y}$$

→ tarda

$$T = \frac{d}{U_o} = 71.45$$

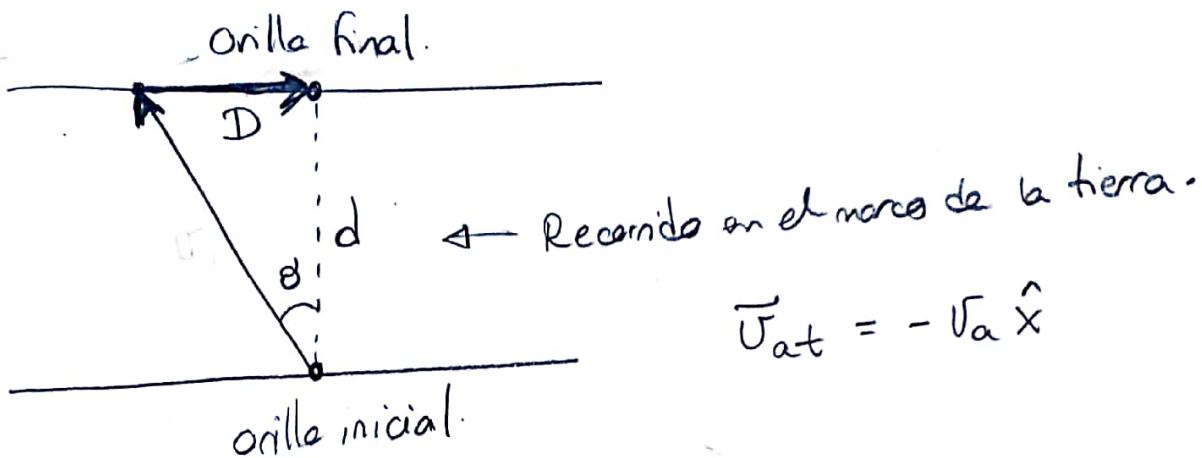
Respecto de la tierra:

$$\begin{aligned} \vec{U}_{nt} &= \vec{U}_{na} + \vec{U}_{at} = U_o \hat{y} - U_a \hat{x} \\ \theta &= \arctg \left( -\frac{U_a}{U_o} \right) + 180^\circ = 125.5^\circ \end{aligned}$$

4

Si su velocidad máxima corriendo en la tierra es  $v_c$ ,

¿Cuál es el menor tiempo en el que puede alcanzar el punto opuesto? ¿Qué recorrido hace? (Trayectoria lineal)



$$\vec{U}_{nt} = U_t (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$$

$$\vec{U}_{na} = \vec{U}_{nt} - \vec{U}_{at} = [-U_t \sin \theta + U_a] \hat{x} + U_t \cos \theta \hat{y}$$

Para maximizar la velocidad en el agua  $\rightarrow |\vec{U}_{na}| = U_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_0 &= \sqrt{U_t^2 \sin^2 \theta - 2 U_t U_a \sin \theta + U_a^2 + U_t^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{U_t^2 + U_a^2 - 2 U_t U_a \sin \theta + \underbrace{U_a^2 \sin^2 \theta}_{\text{suma}} - \underbrace{U_a^2 \sin^2 \theta}_{\text{resto}}} \\ &= \sqrt{U_a^2 + (U_t - U_a \sin \theta)^2 - U_a^2 \sin^2 \theta} \\ &\Rightarrow b = \sqrt{U_a^2 \cos^2 \theta + (U_t - U_a \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

5

$$\Rightarrow V_t = \sqrt{V_0^2 - V_a^2 \cos^2 \theta} + V_a \sin \theta.$$

Con este ángulo  $\theta$ , el tiempo que tarda en cruzar la otra orilla es

$$T_a(\theta) = \underbrace{\frac{d}{\cos \theta}}_{\text{distancia recorrida en el agua}} (V_t(\theta))^{-1} = \frac{d}{\cos \theta} \left[ \sqrt{V_0^2 - V_a^2 \cos^2 \theta} + V_a \sin \theta \right]^{-1}$$

Luego tiene que correr hasta el punto abierto:

$$T_c(\theta) = \underbrace{d \operatorname{tg} \theta}_{\text{distancia recorrida en la tierra}} \cdot \frac{1}{V_c}$$

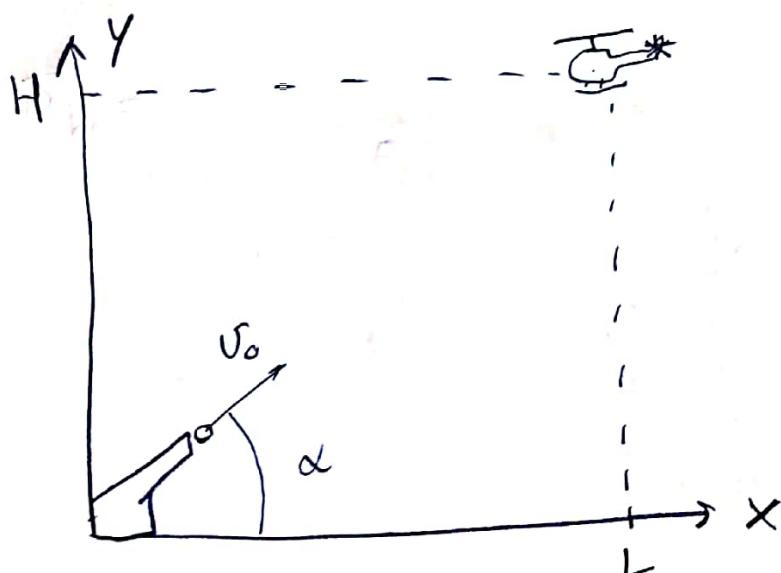
$$\Rightarrow T(\theta) = T_a(\theta) + T_c(\theta)$$

El recorrido línea que minimiza el tiempo de llegada es el que minimiza esta función.

## Ejercicio 17

Un helicóptero se encuentra suspendido en la posición  $x=L$ ,  $y=H$ . En  $t=0$  comienza a descender con aceleración  $a_y = -kt$  ( $k > 0$ ). En el origen de coordenadas hay un cañón que forma un ángulo  $\alpha$  con lo horizontal y dispara proyectiles con velocidad de salida  $v_0$ .

- [a] Trajetoria del proyectil. Grafique  $y(x)$  para ombar



$$\vec{a}_h = -kt \hat{y} = \frac{d\vec{v}_h}{dt} \Rightarrow$$

Integro

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_{hx}}{dt} = 0 \Rightarrow U_{hx} = \text{cte} = 0 \\ \frac{dU_{hy}}{dt} = -kt \Rightarrow \int dU_{hy} = -k \int t dt \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow U_{hy} = -\frac{k}{2} t^2$$

$$\vec{U}_L = -\frac{\kappa}{2}t^2 \hat{y} = \frac{d\vec{r}_w}{dt} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_w}{dt} = 0 \Rightarrow X_w = \text{cte} = L \\ \frac{dY_w}{dt} = -\frac{\kappa}{2}t^2 \Rightarrow \int dY_w = -\frac{\kappa}{2} \int t^2 dt \\ \Rightarrow Y_w(t) = H - \frac{\kappa}{6}t^3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{r}_L(t) = L \hat{x} + \left( H - \frac{\kappa}{6}t^3 \right) \hat{y}$$

$$\vec{a}_p = -g \hat{y} = \frac{d\vec{v}_p}{dt} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_{px}}{dt} = 0 \Rightarrow V_{px} = \text{cte} = V_0 \cos \alpha \\ \frac{dV_{py}}{dt} = -g \Rightarrow \int dV_{py} = -g \int dt \\ \Rightarrow V_{py}(t) = V_0 \sin \alpha - g(t - t_0) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_w = V_0 \cos \alpha \hat{x} + [V_0 \sin \alpha - g(t - t_0)] \hat{y}$$

$$\text{dp} \quad \frac{dX_p}{dt} = V_0 \cos \alpha \Rightarrow \int_0^{x_p} dx_p = V_0 \cos \alpha \int_{t_0}^t dt \Rightarrow X_p = V_0 \cos \alpha (t - t_0)$$

$$\frac{dY_p}{dt} = V_0 \sin \alpha - g(t - t_0) \Rightarrow \int_0^{y_p} dY_p = \left[ \int_{t_0}^t [V_0 \sin \alpha - g(t - t_0)] dt \right]$$

8

$$-\tau = t - t_0 \quad , \quad d\tau = dt$$

$$\Rightarrow Y_p = \int_0^{t-t_0} [V_0 \sin \alpha - g \tau] d\tau = \left( V_0 \sin \alpha \tau - \frac{g}{2} \tau^2 \right) \Big|_0^{(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow Y_p = V_0 \sin \alpha (t - t_0) - \frac{g}{2} (t - t_0)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_p(t) = V_0 \cos \alpha (t - t_0) \hat{x} + \left( V_0 \sin \alpha (t - t_0) - \frac{g}{2} (t - t_0)^2 \right) \hat{y}}$$

La trayectoria del proyectil es  $Y_p(x_p)$

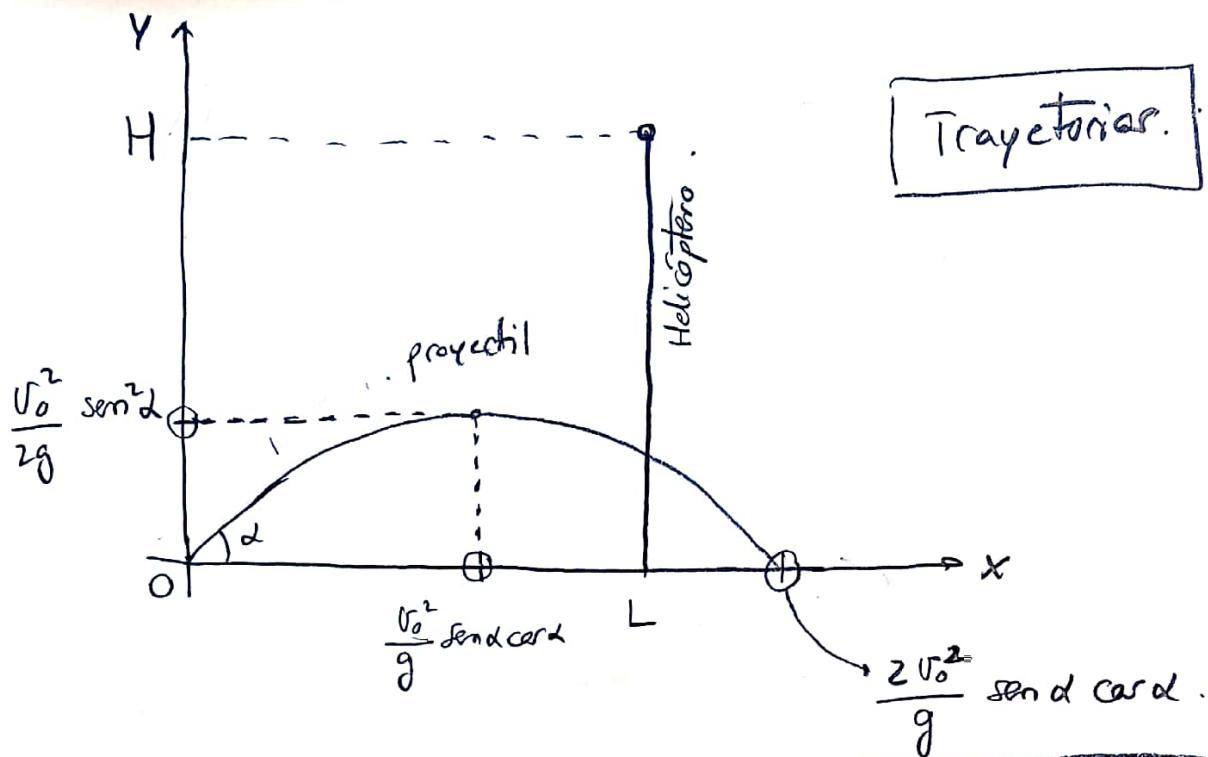
$$X_p = V_0 \cos \alpha (t - t_0) \Rightarrow (t - t_0) = \frac{X_p}{V_0 \cos \alpha}$$

$$Y_p = V_0 \sin \alpha (t - t_0) - \frac{g}{2} (t - t_0)^2 = \frac{V_0 \sin \alpha}{V_0 \cos \alpha} X_p - \frac{g}{2} \frac{X_p^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_p(x_p) = \tan \alpha X_p - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} X_p^2}$$

$$x_p = 0 \quad (\text{disparo})$$

$$Y_p = 0 \quad \leftarrow x_p = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad (\text{toca el piso})$$



b) Para qué valores de  $V_0$  se intersectan las trayectorias?

Necesito que

$$\frac{2V_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \geq L$$

c) Si  $V_0$  satisface la cota anterior, en qué instante debe efectuarse el disparo para que el proyectil impacte sobre el helicóptero.

Busca  $t_0$  / cuando  $X_P = L$ ,  $Y_P = Y_h$

$$V_0 \cos \alpha (t - t_0) = L$$

$$V_0 \cos \alpha (t - t_0) - \frac{g}{2} (t - t_0)^2 = H - \frac{\kappa}{6} t^3$$

$$\Rightarrow V_0 \cos \alpha \frac{L}{V_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \frac{L^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} = H - \frac{\kappa}{6} \left( \frac{L}{V_0 \cos \alpha} + t_0 \right)^3$$

$$-\frac{g}{\kappa} \left( \tan \alpha L - \frac{gL^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} - H \right) = \left( \frac{L}{V_0 \cos \alpha} + t_0 \right)^3$$

$$\Rightarrow t_0 = - \frac{L}{V_0 \cos \alpha} - \left[ \frac{g}{\kappa} \left( \tan \alpha L - \frac{gL^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} - H \right) \right]^{1/3}$$