Dinámica 09/02 — Ejercicios 1 - 11

Entrega de ejercicios de la guía DINAMICA: Ejs 6, 11, 16

Fecha límite: Domingo 14/2.

Ya vimos cómo recorrer: $\vec{r}(t) \underset{\text{int}}{\overset{\text{der}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{int}}{\overset{\text{der}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$.

derivando, integrando e imponiendo condiciones iniciales.

Las ecuaciones de Newton permiten calcular aceleraciones al identificar las fuerzas que las producen $\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$.

m ↓ Masa.

$[a] = \frac{m}{s^2}$, $[m] = kg$, $[F] = \frac{kg\,m}{s^2} = N$

En los problemas de la guía nos presentan una situación física que involucra a varios objetos. En general procedemos así:

1. Identifico las fuerzas aplicadas a cada objeto y sus vínculos.
2. Elijo uno (o varios) sistemas de referencia
3. Dibujo los <u>diagramas de cuerpo libre</u> y escribo la expresión de cada fuerza en el sistema elegido.

4) Escribo las ecuaciones de Newton y los vínculos del problema.

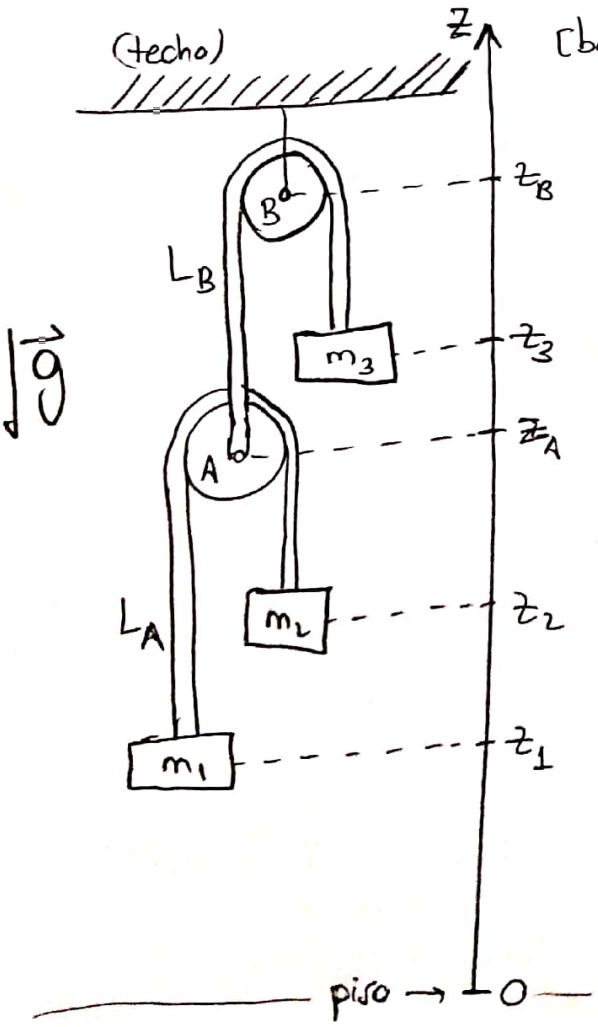
5) Reemplazo los vínculos e integro las ecuaciones imponiendo las condiciones iniciales.

Ejercicio 4

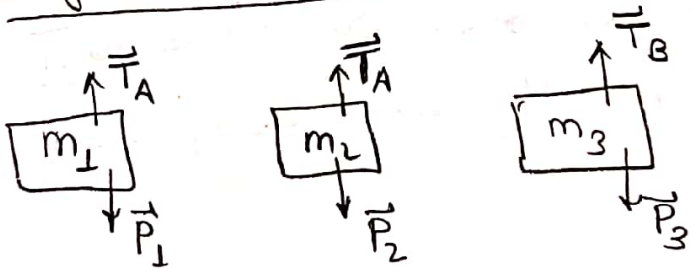
El sistema de la figura se encuentra inicialmente en reposo.

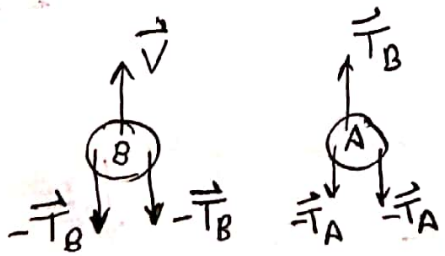
Las poleas y los hilos tienen masas despreciables y los hilos son inextensibles.

[balance de fuerzas es nulo] [vínculo].



Diagramas de cuerpo libre:





$$\boxed{\begin{aligned} \vec{P}_1 &= -m_1 g \hat{z} \\ \vec{P}_2 &= -m_2 g \hat{z} \\ \vec{P}_3 &= -m_3 g \hat{z} \\ \vec{T}_A &= T_A \hat{z} \\ \vec{T}_B &= T_B \hat{z} \\ \vec{V} &= V \hat{z} \end{aligned}}$$

Vínculos: $z_B = cte$

$$(z_B - z_A) + (z_B - z_3) = L_B$$

$$(z_A - z_1) + (z_A - z_2) = L_A$$

Ecuaciones de Newton: (Todas en $\hat{z}$)

(1) $m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + T_A$

(2) $m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + T_A$

(3) $m_3 \ddot{z}_3 = -m_3 g + T_B$

(A) $0 = T_B - 2T_A$

(B) $0 = V - 2T_B$

Vínculos $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{z}_A + \ddot{z}_3 = 0 \\ &2\ddot{z}_A - \ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 = 0 \end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow \ddot{z}_3 = -\frac{1}{2}(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2)$ (V)

Busco las aceleraciones de c/cuerpo y las tensiones en los hilos

m_2(1) + m_1(2): $m_1 m_2 (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -2m_1 m_2 g + (m_1 + m_2) T_A$

Uso (V) y (A): $-2\mu \ddot{z}_3 = -2\mu g + \frac{1}{2} T_B$ (3')

$\boxed{\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$

(3): $m_3 \ddot{z}_3 = -m_3 g + T_B$

2(3') − (3): $-(m_3 + 4\mu)\ddot{z}_3 = (m_3 - 4\mu) g$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z}_3 = \frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3} g}$$

② − ① : $m_2 \ddot{z}_2 - m_1 \ddot{z}_1 = (m_1 - m_2) g$.

$\ddot{z}_2$) Uso Ⓥ : $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 - 2\ddot{z}_3 = -\ddot{z}_2 - 2g\left(\frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3}\right)$

Reemplazo: $m_2 \ddot{z}_2 - m_1 \left[-\ddot{z}_2 - 2g\left(\frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3}\right)\right] = (m_1 - m_2) g$.

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z}_2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g - \frac{2 m_1 g}{(m_1 + m_2)}\left(\frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3}\right)}$$

$\ddot{z}_1$) Si en cambio uso Ⓥ : $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1 - 2\ddot{z}_3 = -\ddot{z}_1 - 2g\left(\frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3}\right)$

Reemplazo: $m_2 \left[-\ddot{z}_1 - 2g\left(\frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3}\right)\right] - m_1 \ddot{z}_1 = (m_1 - m_2) g$.

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z}_1 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) g - \frac{2 m_2 g}{(m_2 + m_1)}\left(\frac{4\mu - m_3}{4\mu + m_3}\right)}$$

Son simétricas frente al intercambio $(1 \leftrightarrow 2)$.

<u>Tensiones:</u> $T_B = 2T_A = m_3(g + \ddot{z}_3) = m_3\left(1 - \frac{m_3 - 4\mu}{m_3 + 4\mu}\right) g$

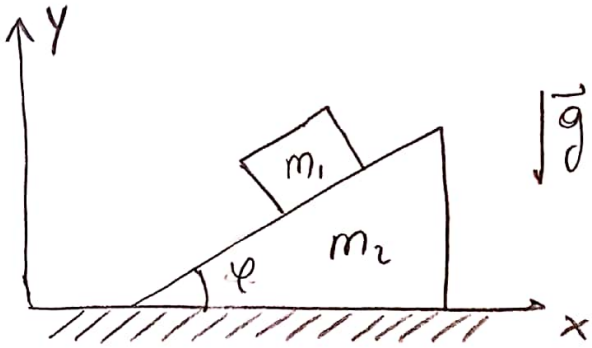
$$= \frac{m_3}{m_3 + 4\mu}\left[m_3 + 4\mu - m_3 + 4\mu\right] g$$

$$\Rightarrow \boxed{T_B = 2T_A = \frac{8 m_3 \mu}{m_3 + 4\mu} g}$$

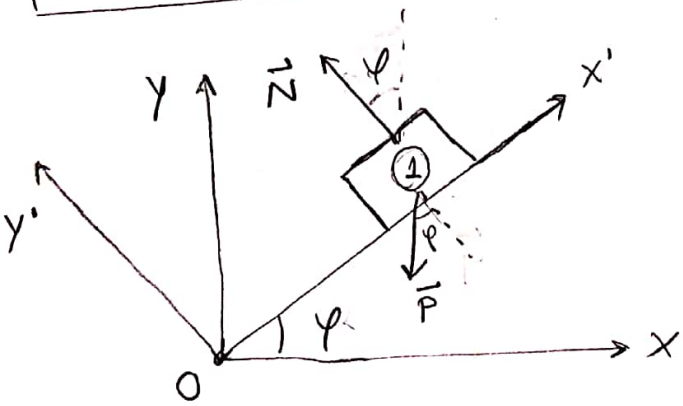
Ejercicio 7

Un bloque de masa m_1 está colocado sobre un plano inclinado de masa m_2.

No hay fricción



i) Plano inclinado fijo. Hallar las componentes x e y de la aceleración de 1.



$$\vec{P} = -mg\,\hat{y} = mg\left(-\cos\varphi\,\hat{y}' - \operatorname{sen}\varphi\,\hat{x}'\right)$$

$$\vec{N} = N\left(\cos\varphi\,\hat{y} - \operatorname{sen}\varphi\,\hat{x}\right) = N\,\hat{y}'$$

<u>vínculo:</u> $y' = 0$

$$y = tg(\varphi)\,x$$

<u>Newton:</u> $\hat{x})\ -N\operatorname{sen}\varphi = m_1\ddot{x}$ $\qquad$ $\hat{x}')\ -m_1 g\operatorname{sen}\varphi = m_1\ddot{x}'$

$\hat{y})\ N\cos\varphi - mg = m_1\ddot{y}$ $\qquad$ $\hat{y}')\ N - m_1 g\cos\varphi = m_1\ddot{y}'$

Busco las aceleraciones en el sistema XY: Impongo vínculo.

$\hat{x}$): $-N \operatorname{sen}\varphi = m_1 \ddot{x}$

$\hat{y}$) $N \cos\varphi = m_1 \underbrace{tg(\varphi)\,\ddot{x}}_{\ddot{y}} + mg$.

$\cos\varphi(\hat{x}) + \operatorname{sen}\varphi(\hat{y}) \Rightarrow \cos\varphi\, m_1 \ddot{x} + \operatorname{sen}\varphi\, tg(\varphi) m_1 \ddot{x} + m_1 g \operatorname{sen}\varphi = 0$

Divido x $m_1 \cos\varphi$: $\left[1 + tg^2(\varphi)\right]\ddot{x} = -tg\varphi\, g$.

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \dfrac{-tg\varphi}{\left[1 + tg^2\varphi\right]}\, g}$ alternativamente: $\boxed{\ddot{x} = -\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, g}$

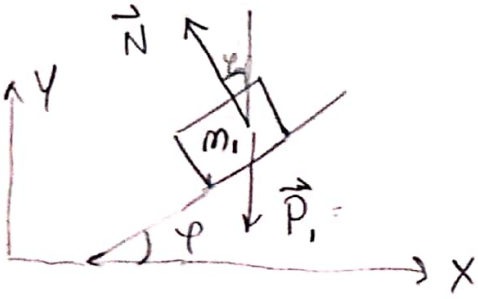
Vuelvo a usar vínculo: $\boxed{\ddot{y} = tg\varphi\, \ddot{x} = -\operatorname{sen}^2\varphi\, g}$

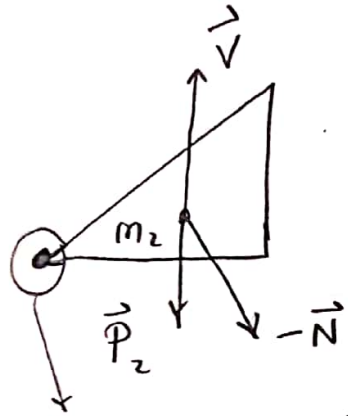
Las aceleraciones en el sistema $x'y'$ son más fáciles:

x vínculo: $\boxed{\ddot{y}' = 0}$, $\boxed{\ddot{x}' = -g \operatorname{sen}\varphi}$

ii) El bloque 2 es libre de moverse. Encuentre a_{1x}.

Diagrama de cuerpo libre:





$\vec{P}_1 = -m_1 g \hat{y}$

$\vec{N} = N(\cos\varphi\, \hat{y} - \operatorname{sen}\varphi\, \hat{x})$

$\vec{P}_2 = -m_2 g \hat{y}$

$\vec{V} = V \hat{y}$

$\vec{r}_1 = x_1 \hat{x} + y \hat{y}$

$\vec{r}_2 = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y}$

Newton:

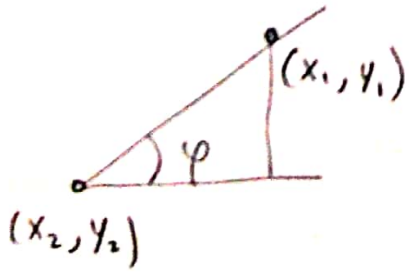
$1\hat{x})\quad m_1 \ddot{x}_1 = -N \operatorname{sen}\varphi \longrightarrow a_{1x} = \ddot{x}_1$ Esto es lo que pide el ejercicio.

$1\hat{y})\quad m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + N\cos\varphi$

$2\hat{x})\quad m_2 \ddot{x}_2 = N \operatorname{sen}\varphi$

$2\hat{y})\quad m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g - N\cos\varphi + V$

2 Vínculos:



$$\begin{cases} tg(\varphi) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

V

$$(V): \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{y}_1 \frac{1}{tg(\varphi)}$$

$$(1\hat{x}) + (2\hat{x}): \ m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1$$

reemplazo en (V) $\ddot{x}_1 + \frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_1 = \frac{\ddot{y}_1}{tg(\varphi)}$

Por otro lado, $\cos\varphi\,(1\hat{x}) + \operatorname{sen}\varphi\,(1\hat{y})$:

reemplazo.

$$m_1 \cos\varphi\, \ddot{x}_1 + \operatorname{sen}\varphi\, m_1 (\ddot{y}_1 + g) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{m_1} \cos\varphi\, \ddot{x}_1 + \cancel{m_1} \operatorname{sen}\varphi \cdot tg(\varphi)\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_1 + \operatorname{sen}\varphi\, \cancel{m_1} g = 0$$

Divido por $\cos\varphi$:

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{m_2} tg^2(\varphi)(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + tg(\varphi)\, g = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{g\, tg(\varphi)}{1 + \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) tg^2(\varphi)} = -\frac{g\, m_2\, tg(\varphi)}{m_2 + (m_1 + m_2) tg^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{1x} = \ddot{x}_1 = -\frac{g\, m_2\, tg(\varphi)}{\left[m_1\, tg^2(\varphi) + m_2\, sec^2(\varphi)\right]}}$$

Bloque fijo
$m_2 \to \infty$
Recupero resultado anterior

ii) b) Encuentre a_{2x}

Se que $\ddot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1 = -\frac{m_1}{m_2}\left[-\frac{g\, m_2\, tg(\varphi)}{m_1\, tg^2(\varphi) + m_2 \sec^2(\varphi)}\right]$

$$\boxed{a_{2x} = \ddot{x}_2 = \frac{g\, m_1\, tg(\varphi)}{m_1\, tg^2(\varphi) + m_2 \sec^2(\varphi)}}$$

Limites: $m_1 \to 0$
$m_2 \to \infty$

Un sistema fijo al bloque 2 es un SNI

ii) c) Encuentre a_{1y}

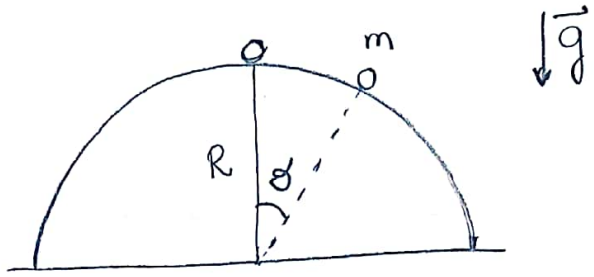
Uso (V): $\ddot{y}_1 = tg(\varphi)\,(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)$

$$= tg(\varphi)\,\frac{-(m_2+m_1)\, g\, tg(\varphi)}{[m_1\, tg^2(\varphi) + m_2 \sec^2(\varphi)]}$$

$$\boxed{a_{1y} = \ddot{y}_1 = -\frac{(m_1+m_2)\, g\, tg^2(\varphi)}{m_1\, tg^2(\varphi) + m_2 \sec^2(\varphi)}}$$

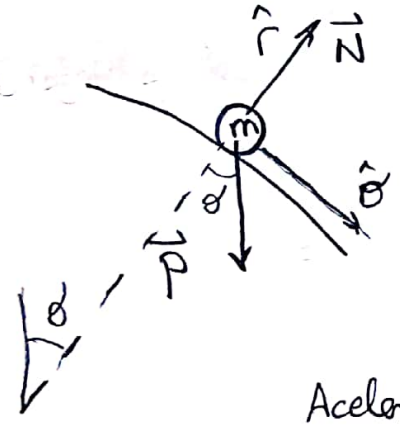
Limites: $m_2 \to 0$
$m_1 \to \infty$
$m_2 \to \infty$
(resultado anterior).

Ejercicio 9



a) Calcular el ángulo θ para el cual se separa de la superficie si inicialmente es apartado infinitesimalmente de $\theta = 0$ con velocidad nula.

Elijo coordenadas polares y planteo diagrama de fuerzas.



$$\vec{N} = N\hat{r}$$

$$\vec{P} = mg\left(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{r}\right)$$

Aceleración en polares: $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

<u>Newton</u>: $\hat{r}$) $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$) $m(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}) = mg\operatorname{sen}\theta$.

<u>Vínculo</u>: $r = R = cte \Rightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

<u>Condiciones iniciales</u>: $\theta(0) \approx 0$

$\dot{\theta}(0) = 0$

La masa se separa de la superficie cuando $N = 0$.

$\Rightarrow$ cuando $-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta$. (☆)

Para conocer el ángulo en que la hace, necesito $\dot{\theta}^2(\theta)$.

Para eso integro $mR\ddot{\theta} = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Uso $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\dot{\theta}^2} d\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\int_0^{\theta} \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left[1-\cos\theta\right]$$

Reemplazo en (☆): $2g[1-\cos\theta] = g\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 48^\circ}$$

b) Si la masa se engarza en un riel semicircular de radio R, ¿Con que velocidad y aceleración llega al suelo? (tangencial)

Uso: $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left[1 - \cos\theta\right]$ evaluado en $\theta = 90°$

$\Rightarrow$ llega al suelo con velocidad angular $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$

velocidad tangencial $\boxed{v_t = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR}}$

aceleración tangencial: $\boxed{a_t = R\ddot{\theta} = g\,\text{sen}(90°) = g}$