

Movimiento Oscilatorio

12/2

Entrega: 4, 6, 8

1

Fecha: Viernes 19

Definiciones: ① Frecuencia ν : $[\nu] = \frac{1}{\text{tiempo}}$

$\nu \cdot t$ es la cantidad de veces que ocurre un fenómeno en un tiempo t .

② Período T : $[T] = \text{tiempo}$.

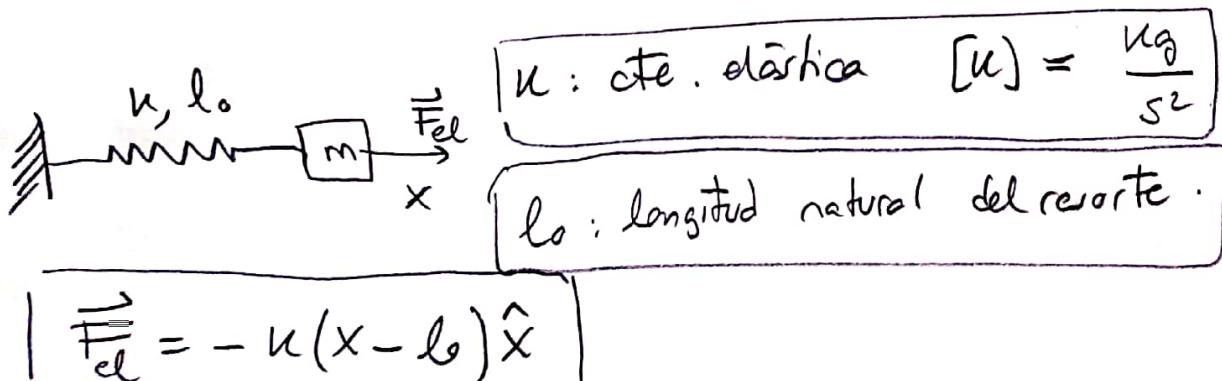
$T = \frac{1}{\nu}$ es el tiempo que tarda en producirse el fenómeno. ($\nu \cdot T = 1$)

③ Frecuencia angular ω : $[\omega] = \frac{\text{ángulo}}{\text{tiempo}}$

$\omega \cdot t$ es el ángulo recorrido en un tiempo t .

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Fuerza elástica: Es la fuerza producida x un resorte o elástica.



Planteo Newton: $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$

[2]

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kl_0}{m}} \rightarrow \text{cara particular de la ec. de Euler.}$$

Veamos el cara general y luego veras como resolver esto

Ecu. Euler

$$\textcircled{a} \quad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

Inhomogénea

($b > 0, c > 0$)

$$\textcircled{b} \quad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

homogénea.

Solución general: $x(t) = x_h(t) + \underbrace{x_p(t)}_{\text{particular}}$

$$\text{si } f = \text{cte} \Rightarrow x_p(t) = \text{cte.}$$

Solución homogénea: $\textcircled{3}$ casos de acuerdo

Caso 1

$$b^2 < 4c$$

$$x_h(t) = A e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ con } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}$$

3

Caso 2

$$b^2 = 4c$$

$$x_h(t) = e^{-\frac{b}{2}t} (At + B)$$

Caso 3

$$b^2 > 4c$$

$$x_h(t) = A e^{w_+ t} + B e^{w_- t}$$

con $w_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$

Verifica:

Caso 1 ($b^2 < 4c$)

$$x_h(t) = A e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

con $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}$

$$\dot{x}_h(t) = -\frac{b}{2} x_h(t) = A e^{-\frac{b}{2}t} \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{b}{2} \left[-\frac{b}{2} x_h(t) - A e^{-\frac{b}{2}t} \omega \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

$$+ A \omega \frac{b}{2} e^{-\frac{b}{2}t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$- A e^{-\frac{b}{2}t} \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow -\omega^2 x_h(t)$$

4

$$\left(\frac{b^2}{4} - \omega^2 \right) X_h + A b \omega e^{-\frac{b}{2}t} \cancel{\sin(\omega t + \varphi)} \rightarrow \ddot{X}_h$$

$$+ b \left[-\frac{b}{2} X_h(t) - A \omega e^{-\frac{b}{2}t} \cancel{\sin(\omega t + \varphi)} \right] + c X_h(t)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\dot{X}_h}$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{b^2}{4} - \omega^2 - \frac{b^2}{2} + c \right)}_{= 0} X_h = 0.$$

$$\omega^2 = c - \frac{b^2}{4} \rightarrow \text{solo vale si } 4c > b^2 \checkmark$$

Caso 2 ($b^2 = 4c$)

$$X_h(t) = e^{-\frac{b}{2}t}(At + B)$$

$$\dot{X}_h(t) = -\frac{b}{2} X_h(t) + A e^{-\frac{b}{2}t}$$

$$\ddot{X}_h(t) = -\frac{b}{2} \left(-\frac{b}{2} X_h(t) + A e^{-\frac{b}{2}t} \right) - \frac{b}{2} A e^{-\frac{b}{2}t}.$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4} X_h - A b e^{-\frac{b}{2}t} + b \left[-\frac{b}{2} X_h + A e^{-\frac{b}{2}t} \right] + c X_h = 0$$

$$\Rightarrow \left(c - \frac{b^2}{4} \right) X_h = 0 \Rightarrow 4c = b^2 \checkmark$$

Caso 3 ($b^2 > 4c$)

$$x_h(t) = A e^{w_+ t} + B e^{w_- t}$$

$$\text{con } w_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

$$\dot{x}_h = A w_+ e^{w_+ t} + B w_- e^{w_- t}$$

$$\ddot{x}_h = A w_+^2 e^{w_+ t} + B w_-^2 e^{w_- t}$$

$$\Rightarrow A e^{w_+ t} [w_+^2 + b w_+ + c] + B e^{w_- t} [w_-^2 + b w_- + c] = 0$$

se anula en las raíces de estas funciones cuadráticas:

$$w_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \checkmark$$

Volviendo al ejemplo:



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{u_{lo}}{m}$$

¿A qué caso corresponde?

$$b=0, c=\frac{k}{m}, f(t)=\frac{u_{lo}}{m} = \text{cte.}$$

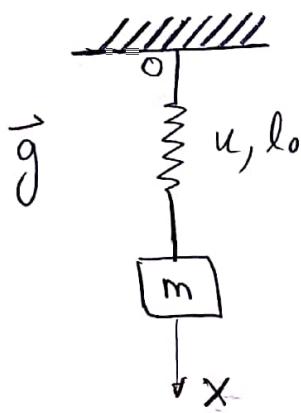
Caso 1 $b^2 < 4c$

$$\text{Solución homogénea } x_h(t) = A e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ con } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}$$

$$\Rightarrow x_h(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi\right)$$

$$\text{Solución particular } x_p(t) = \text{cte} = l_o \Rightarrow x(t) = l_o + A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi\right)$$

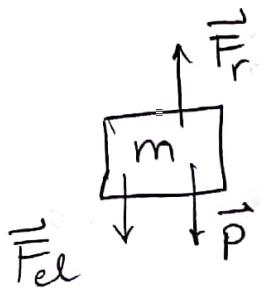
Un ejemplo un poco más elaborado:



Sujeto a una fuerza de rozamiento con el aire $\vec{F}_r = -\gamma \dot{x} \hat{x}$, $[\gamma] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $\gamma \geq 0$

Calcular la ecuación de movimiento para la masa

DCL



$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= -\gamma \dot{x} \hat{x} \\ \vec{F}_{el} &= -k(x - l_0) \hat{x} \\ \vec{P} &= mg \hat{x}\end{aligned}$$

Newton: $m \ddot{x} = -\gamma \dot{x} - k(x - l_0) + mg$

Llevo a la forma de la ec. de Euler:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = g + \frac{kl_0}{m}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\gamma}{m}, \quad c = \frac{k}{m}, \quad f(t) = g + \frac{kl_0}{m} = \text{cte.}$$

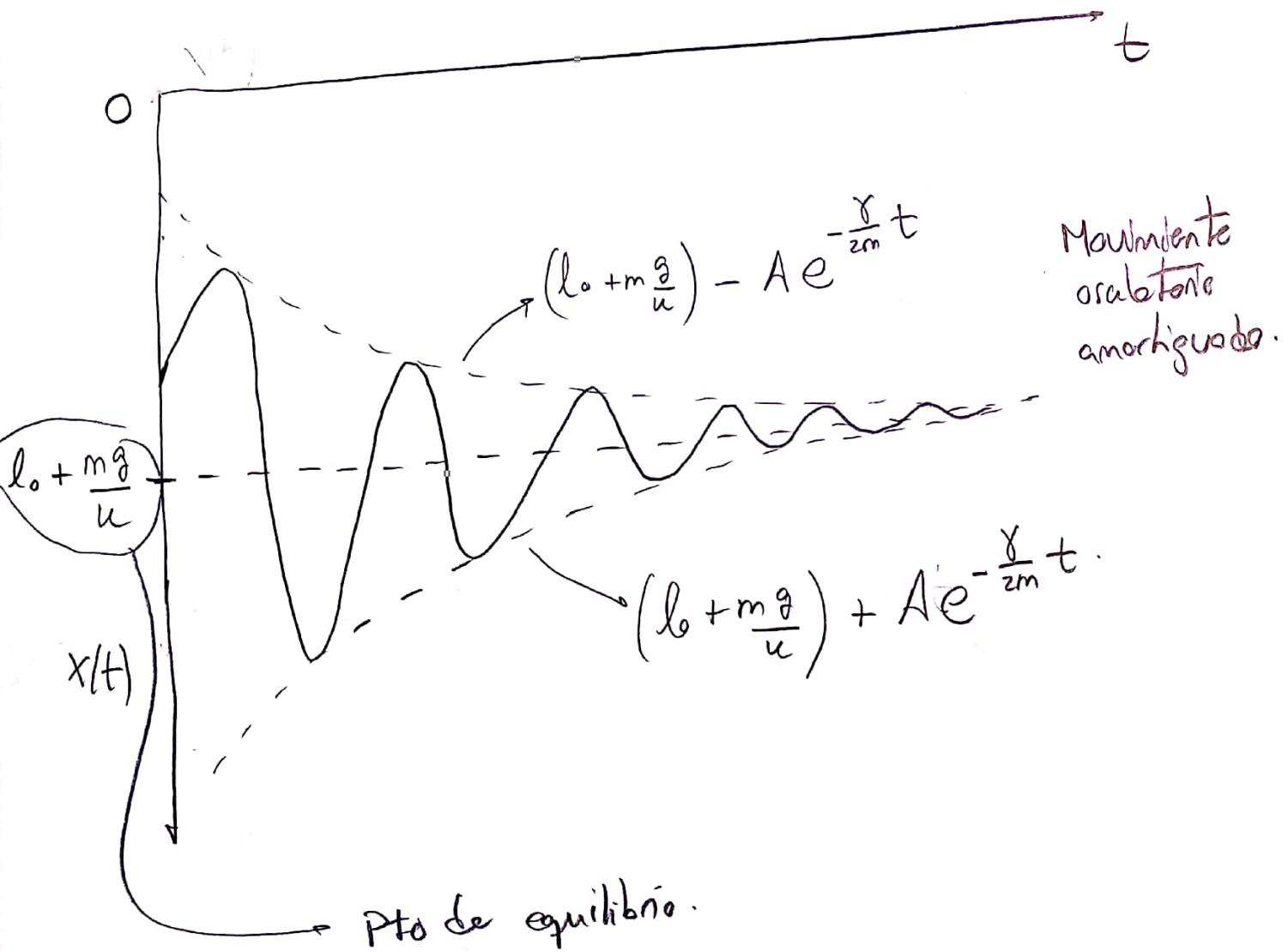
Caso 1: $b^2 < 4c \Rightarrow \gamma^2 < 4k$ → El resorte es más "fuerte" que el aire

$$x(t) = \left(l_0 + \frac{mg}{\kappa} \right) + A e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

7

$$\text{con } \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\gamma^2}{m^2}}$$

sob de las cond. iniciales



Caso 3 $b^2 > 4c$

$$\gamma^2 > 4\kappa$$

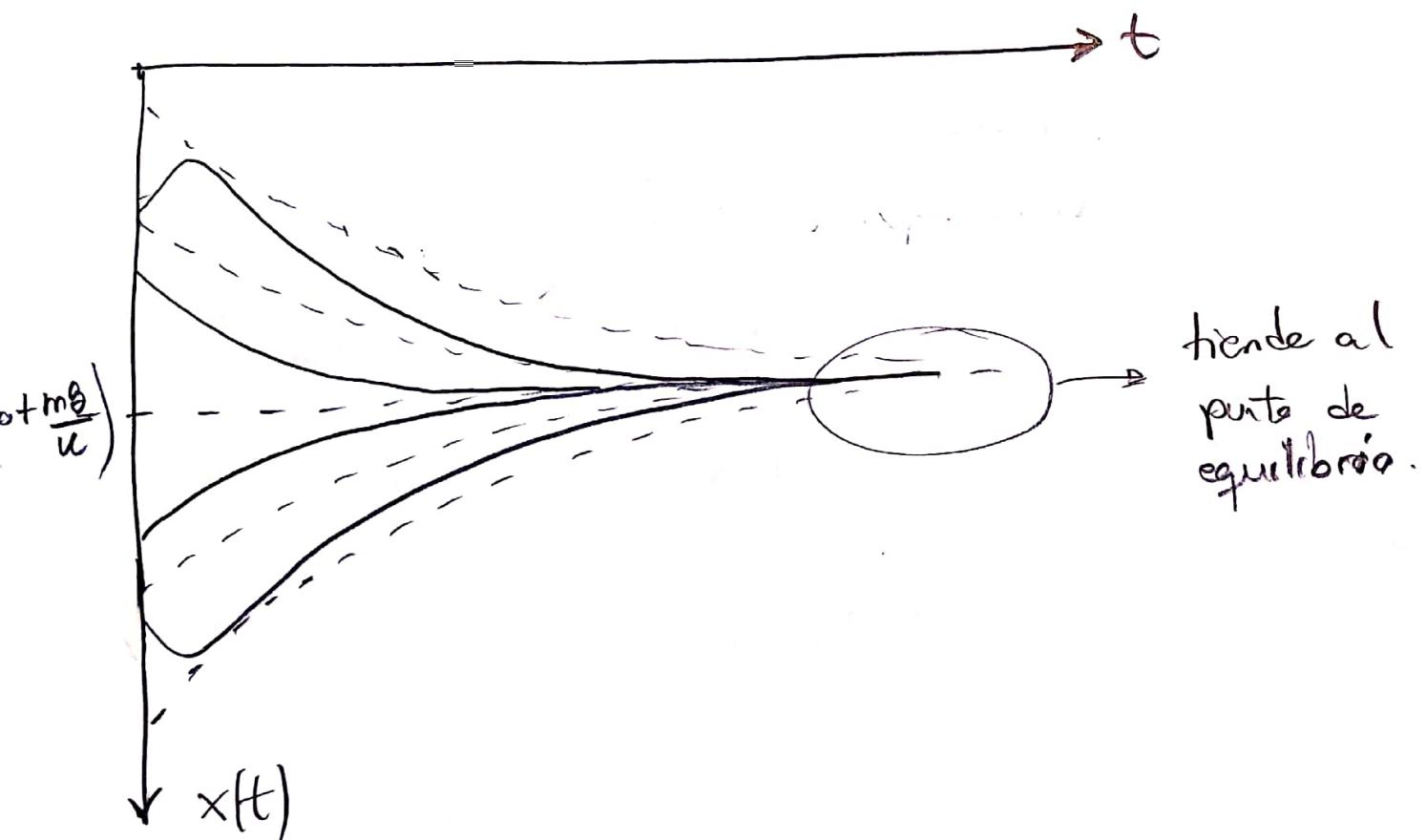
8

El aire parece
dulce de leche y al
resorte le cuesta
mucho hacer oscilar
a la maja

$$x(t) = \left(b + \frac{mg}{\kappa} \right) + (A e^{\omega_+ t} + B e^{-\omega_- t})$$

condiciones iniciales.

$$\text{con } \omega_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}$$

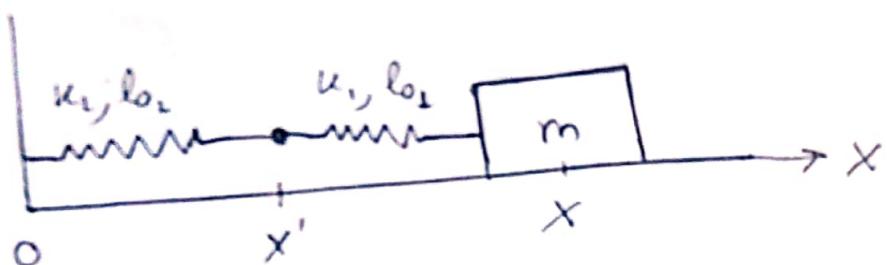


Para pensar ahora: Resolver el ejercicio 3

Ejercicio 5

Encontrar la frecuencia y la posición de equilibrio en los siguientes casos:

a)



$$\underline{\text{DCL}}: \quad \xleftarrow[m=0]{\vec{F}_{el_2} \quad \vec{F}_{el_1}} -\vec{F}_{el_2} \rightarrow [m]$$

$$\vec{F}_{el_2} = -k_2(x' - l_{o_2}) \hat{x}$$

$$\vec{F}_{el_1} = k_1(x - x' - l_{o_1}) \hat{x}$$

$$\underline{\text{Newton}}: \quad 0 = k_1(x - x' - l_{o_1}) - k_2(x' - l_{o_2})$$

$$m\ddot{x} = -k_1(x - x' - l_{o_1})$$

$$\text{Desp. } x': \quad x' = \frac{1}{k_1 + k_2} [k_1(x - l_{o_1}) + k_2 l_{o_2}]$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k_1 x + \frac{k_1}{k_1+k_2} [k_1 x - k_1 l_{o_1} + k_2 l_{o_2}] + k_1 l_{o_1} \quad [10]$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \left(k_1 - \frac{k_1^2}{k_1+k_2} \right) x = -\frac{k_1^2}{k_1+k_2} l_{o_1} + \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} l_{o_2} + k_1 l_{o_1}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} x = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} (l_{o_2} + l_{o_1})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)} x}_{\omega^2} = \frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)} (l_{o_1} + l_{o_2}).$$

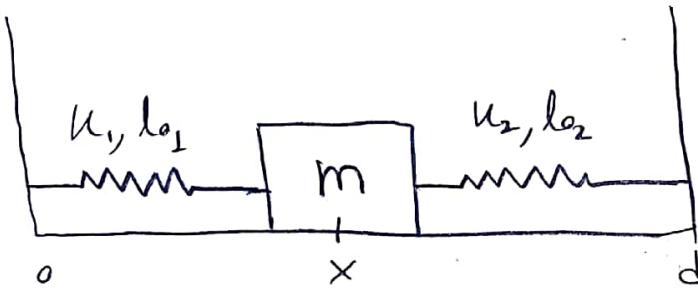
\Rightarrow

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

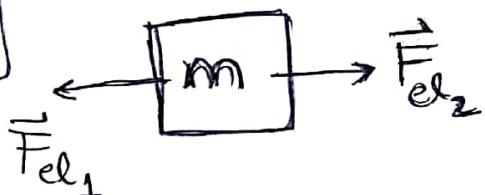
$$x_{eq} = l_{o_1} + l_{o_2}$$

b

11



DCL



$$\vec{F}_{el1} = -k_1(x - l_{o_1})$$

$$\vec{F}_{el2} = k_2(d - x - l_{o_2})$$

Newton

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k_1(x - l_{o_1}) + k_2(d - x - l_{o_2})$$

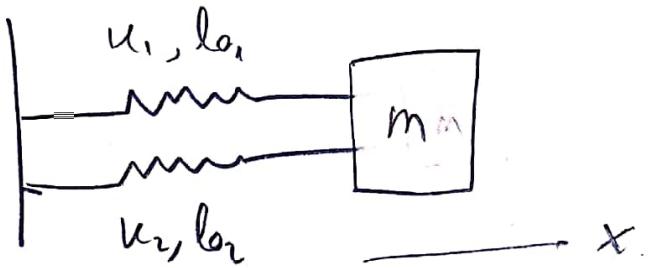
$$\Rightarrow m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_1l_{o_1} - k_2l_{o_2} + k_2d$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_1l_{o_1} - k_2l_{o_2} + k_2d}{m}$$

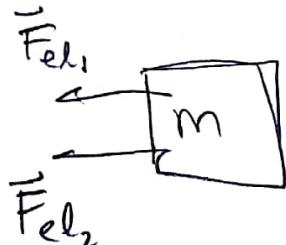
$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$x_{eq} = \frac{k_1l_{o_1} - k_2l_{o_2} + k_2d}{k_1 + k_2}$$

C



DCL



$$\vec{F}_{el1} = -k_1(x - l_{01})$$

$$\vec{F}_{el2} = -k_2(x - l_{02})$$

Newton: $m \ddot{x} = -k_1(x - l_{01}) - k_2(x - l_{02})$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} = \frac{u_1 l_{01} + u_2 l_{02}}{m}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$

$$\boxed{x_{eq} = \frac{u_1 l_{01} + u_2 l_{02}}{k_1 + k_2}}$$