Trabajo y Energía

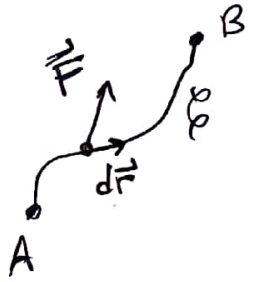
18/02

Entregan ejercicios 3, 4 y 6
El Lunes 22/02

El trabajo dW de una fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ se define como: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

El trabajo que hace una fuerza en un camino $\mathcal{C}$ que une dos puntos A y B está dado por la integral de camino:

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



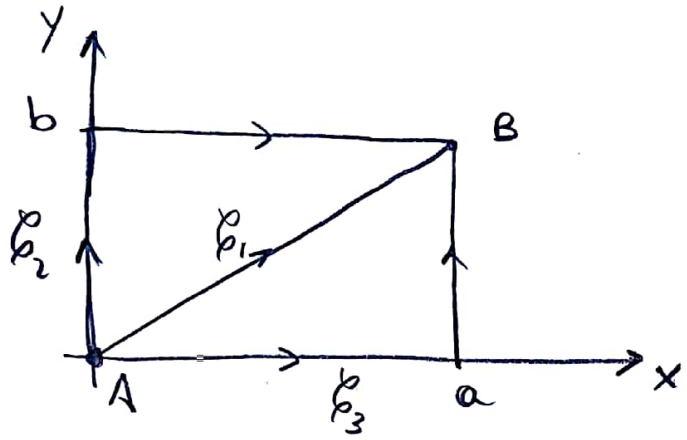
Cuando la fuerza es tal que el trabajo que realiza entre los puntos A y B <u>no depende del camino $\mathcal{C}$</u>

$\Rightarrow$ La fuerza se llama $\boxed{\text{Conservativa}}$

Si en cambio <u>depende del camino</u> es $\boxed{\text{No conservativa}}$

Ejemplo Fuerza constante $\vec{F} = f_x \hat{x} + f_y \hat{y}$

Voy de $A = (0,0)$ a $B = (a,b)$ por 3 caminos.



$\mathcal{C}_1$

$$\boxed{W_1} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} (f_x, f_y) \cdot (dx, dy) = \qquad dy = \frac{b}{a}\, dx$$

$$= \int_0^a \left(f_x + f_y \frac{b}{a} \right) dx = \boxed{a f_x + b f_y}$$

$\mathcal{C}_2$

$$\boxed{W_2} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^b (f_x, f_y) \cdot (0, dy) + \int_0^a (f_x, f_y) \cdot (dx, 0)$$

$$= \boxed{b f_y + a f_x}$$

$\mathcal{C}_3$

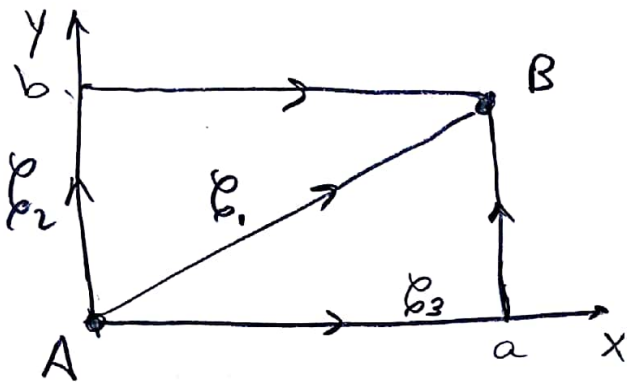
$$\boxed{W_3} = \int_{\mathcal{C}_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a (f_x, f_y) \cdot (dx, 0) + \int_0^b (f_x, f_y) \cdot (0, dy)$$

$$= \boxed{a f_x + b f_y}$$

El trabajo de una fuerza constante no depende del camino $\Rightarrow$ $\boxed{\text{es conservativa}}$

Ejemplo Fuerza de rozamiento (dinámico) $\vec{F} = -\mu_d N \hat{v}$

Voy de $A=(0,0)$ a $B=(a,b)$ por los mismos 3 caminos:



$$\hat{v} = \frac{a\hat{x} + b\hat{y}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\mathcal{C}_1$) $$\boxed{W_1} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\mu_d N \int_{\mathcal{C}_1} \hat{v}\cdot\Big(dx, \underbrace{\frac{b}{a}dx}_{dy}\Big) =$$

distancia recorrida

$$= -\frac{\mu_d N}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_0^a \left(a + \frac{b^2}{a}\right) dx = \boxed{-\mu_d N \sqrt{a^2+b^2}}$$

$\mathcal{C}_2$) $$W_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\mu_d N \int_0^b \hat{y}\cdot dy\,\hat{y} - \mu_d N \int_0^a \hat{x}\cdot dx\,\hat{x}$$

$$= -\mu_d N (a+b)$$ distancia recorrida.

⇒ La fuerza de rozamiento hace un trabajo proporcional a la distancia recorrida ⇒ depende del camino

⇒ $\boxed{\text{Es No conservativa}}$

$\boxed{\text{Fuerza } \vec{F} \text{ es conservativa}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$

(V: Energía potencial).

$\boxed{\text{Ejemplos:}}$

Fza constante: $\vec{F} = f_x \hat{x} + f_y \hat{y} \longrightarrow \boxed{U = -f_x x - f_y y + cte}$

Fza peso: $\vec{F} = -mg\hat{z} \longrightarrow \boxed{U = mg(z - z_0)}$

Fza elástica: $\vec{F} = -k(x - l_0)\hat{x} \longrightarrow \boxed{U = \frac{k}{2}(x - l_0)^2}$

Fzas No conservativas: Fza rozamiento, Fzas vínculo, ...
Fza viscosa, ...

Energía

- **Energía cinética** de un sistema:

$$K = \sum_{i \text{ (partícula)}} \frac{m}{2} v_i^2 \longrightarrow \text{(puede depender del tiempo)}$$

- **Energía potencial** de un sistema:

$$U = \sum_{i \text{ (partícula)}} U_i \longrightarrow \text{(puede depender del tiempo)}$$

- **Energía mecánica** $E = K + U \longrightarrow$ (puede depender del tiempo).

En la teórica vieron:

- El trabajo de las fuerzas $W = \underbrace{\Delta K}_{\text{variación de la energía cinética.}}$

- El trabajo de las fuerzas conservativas $W_c = \underbrace{-\Delta U}_{\text{variación de la energía potencial}}$

⊙ Como $\underline{W = W_c + W_{nc}}$ y $\Delta E = \Delta K + \Delta U$

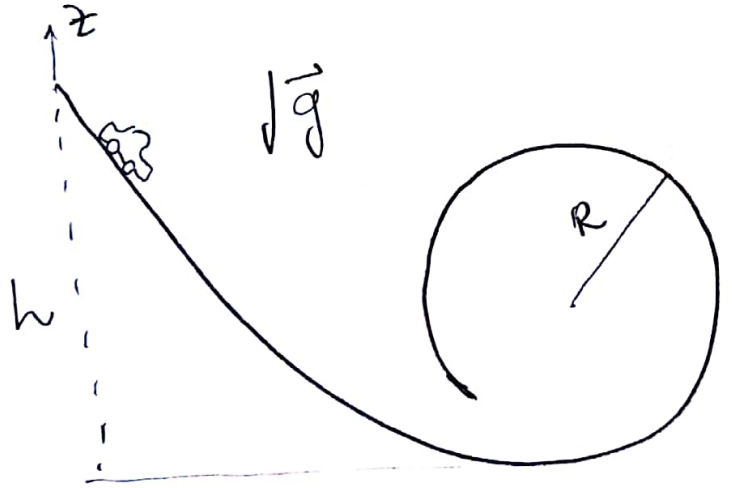
$$\Rightarrow W_{nc} = W - W_c = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

⇒ La variación de la energía es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas.

→ Si las fuerzas <u>no conservativas</u>, <u>no hacen trabajo</u>

→ <u>La energía mecánica se conserva</u> (es cte en t)

Ejercicio 5



(<u>sin rozamiento</u>)

<u>Fuerzas aplicadas al autito:</u>

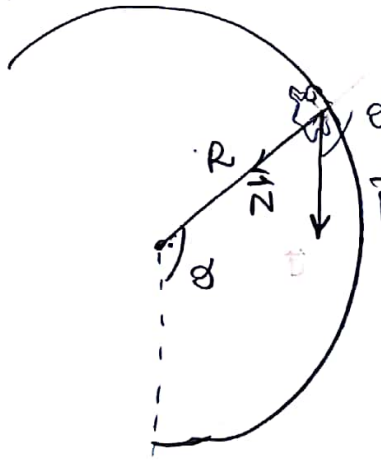
Las fuerzas no conservativas, no hacen trabajo

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La energía mecánica } E = \frac{m}{2} v^2 + mgz \text{ es constante}}$

$\boxed{a}$ ¿Cual es la velocidad mínima del auto en la parte superior del lazo para que no se caiga?

$\boxed{\text{Planteo DCL}}$

(uso polares)



$\vec{P} = mg(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$

$\vec{N} = -N\hat{r}$

Newton:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -N + mg\cos\theta$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -mg\operatorname{sen}\theta$$

Vínculos: $r = R$

Para que no se caiga, $N \geq 0$ en $\theta = \pi$

$$\Rightarrow N = mg\cos\pi + mR\dot{\theta}^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 \geq \frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{v = R\dot{\theta} \geq \sqrt{g \cdot R}}$$ (velocidad tangencial)

$\boxed{b}$ Para que pase lo de $\boxed{a}$, ¿cuanto debe valer h?

La energía mecánica $E = \frac{m}{2}v^2 + mgz$ se conserva.

$$E_i = mgh.$$

$$E_f = \frac{m}{2}(g \cdot R) + mg \cdot 2R = \frac{5}{2}mgR \longrightarrow$$ para saturar la desigualdad.

$$\Rightarrow \boxed{h \geq \frac{5}{2}R}$$

$\boxed{c}$ La altura h mínima requerida para que el auto dé la vuelta sin caerse $h = 1.3\,\boxed{b} = \frac{13}{4}R$.

¿Cuál es el trabajo de las fuerzas no conservativas?

Es igual a la variación de energía:

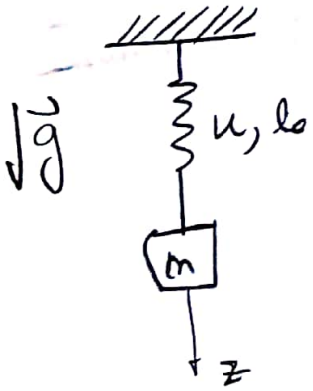
$$E_i = mg\,\frac{13}{4}R.$$

$$E_f = \frac{m}{2}(g.R) + mg.2R$$
$$= \frac{5}{2}mgR$$

→ No cambia porque obtuve v de la ec. de Newton en dirección radial, que no es afectado x las fuerzas de rozamiento.

$$\Delta E = \left(\frac{5}{2} - \frac{13}{4}\right)mgR = \boxed{-\frac{3}{4}mgR = W_{nc}}$$

Descripción gráfica del movimiento de una partícula.



Fuerzas: gravitatoria: $\vec{F} = mg\hat{z}$ (cons)

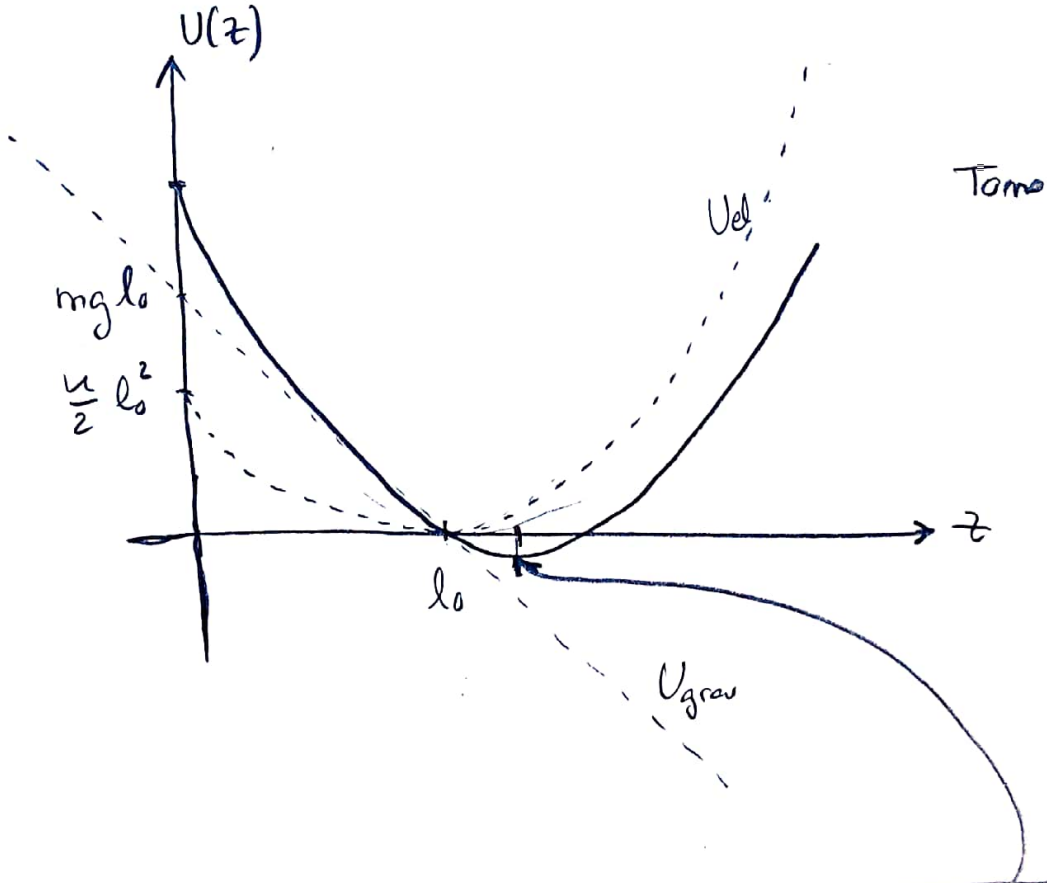
$U_{grav} = -mg(z - z_0)$

elástica: $\vec{F} = -k(z - l_0)\hat{z}$ (cons)

$U_{el} = \frac{k}{2}(z - l_0)^2$

La energía se conserva:

$$E = \frac{m}{2}v^2 + U(z) \quad \text{con } U(z) = U_{grav} + U_{el} = \frac{k}{2}(z - l_0)^2 - mg(z - z_0)$$



Tomo $z_0 = l_0$.

$$\frac{\partial U}{\partial z} = k(z - l_0) - mg \Rightarrow \boxed{z_{min} = l_0 + \frac{mg}{k}} \rightarrow \text{pto de equilibrio}$$

Cuando $E > \underbrace{\frac{k}{2} l_0^2 + mg\, l_0}_{U(0)} \rightarrow$ tiene $K = E - U > 0$

$\Rightarrow$ llego al techo con velocidad no nula.

Para analizar: