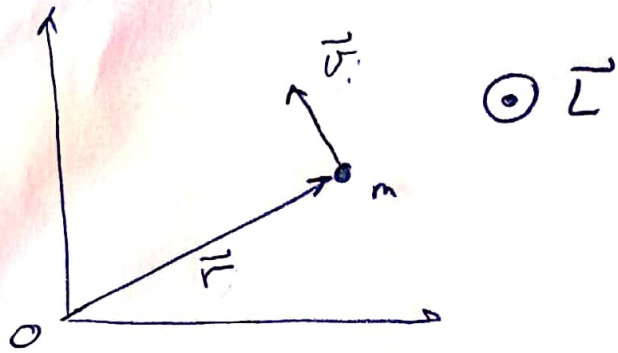
Momento angular (23/2)

momento angular = impulso angular

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$



Importante: depende del sistema de referencia O.

Momento (o torque) de fuerzas externas:

$$\vec{M}_O = \sum_{i\,(\text{partículas})} \sum_{j\,(\text{fuerzas})} \vec{r}_i \times \vec{F}_j .$$

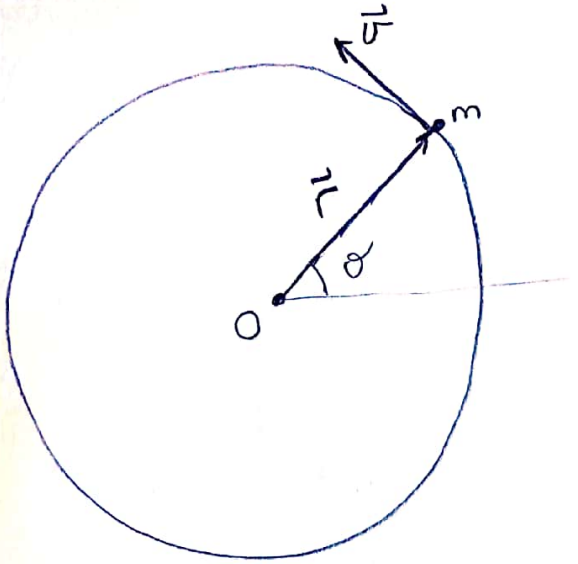
también depende del sistema de referencia O.

Conservación: $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$

Si el torque de las fuerzas externas respecto del punto O es cero $\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{L}_O$ se conserva.

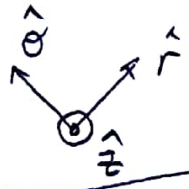
Nota: O debe estar fijo respecto de algún SRI o ser el centro de masa

Ejemplo una partícula que gira con mov. circular uniforme $\dot{\theta} = cte$



$$\vec{L}_o = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m r^2 \dot{\theta}\,\hat{z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r} \\ \vec{v} &= r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \end{aligned}}$$



Mano derecha!

El impulso se conserva porque $\dot{\theta} = cte$.

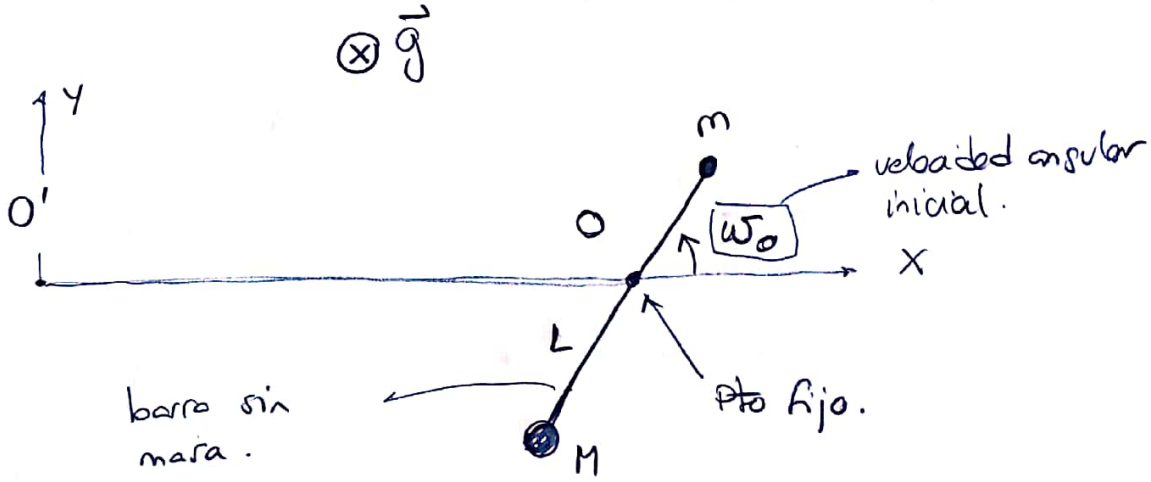
pero, si el mov. circular NO fuera uniforme, x Newton:

$\hat{\theta}$) $m r \ddot{\theta} = F_\theta$

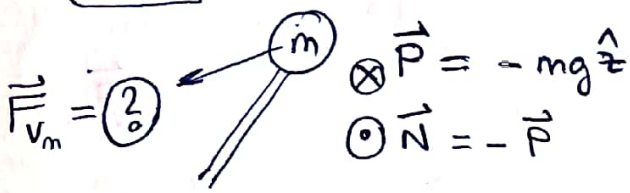
$$\boxed{\dot{\vec{L}}_o = \underbrace{m r^2 \ddot{\theta}}_{r F_\theta}\,\underbrace{\hat{z}}_{\hat{r} \times \hat{\theta}} = r\hat{r} \times F_\theta \hat{\theta} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{torque}} = \vec{M}}$$

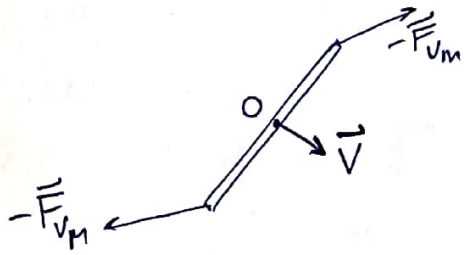
Ejercicio 9

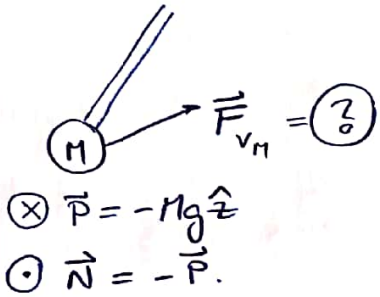
Mesa sin rozamiento



DCL







a) Se conserva el momento lineal y angular del sistema?

Sistema = (m) + (M) + ═

<u>Fuerzas externas que actúan sobre el sistema:</u>

La única fza ext. relevante es la fuerza $\vec{V}$ que hace el eje. No sabemos en qué dirección apunta, ni cuánto vale, pero sabemos que está aplicada en O, y que en principio es no nula. $\boxed{4}$

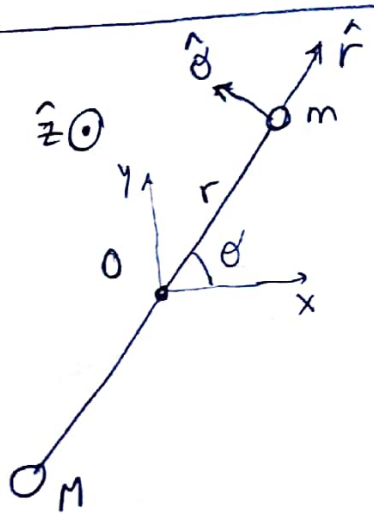
- Como la resultante de las fuerzas externas $\vec{V} \neq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{P} \text{ no se conserva}}$

- Como está aplicada en O, $\boxed{\vec{L}_O \text{ se conserva}}$ $\rightarrow$ $\vec{r}_O = 0$ $\Downarrow$ $\vec{M}_O = \vec{r}_O \times \vec{F}_O = 0$

No hace Torque.

$\boxed{b}$ Calcule el impulso angular respecto de O y determine cómo varía la velocidad angular con el tiempo



$$\vec{L}_O = m\,\vec{r}_m \times \dot{\vec{r}}_m + M\,\vec{r}_M \times \dot{\vec{r}}_M$$

$$\vec{r}_m = r\,\hat{r}$$

$$\vec{r}_M = -(L-r)\,\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}}_m = r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\dot{\vec{r}}_M = -(L-r)\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{y}$$

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = \underbrace{m r^2 \dot{\theta}\,\hat{z}}_{\vec{L}_O^{(m)}} + \underbrace{M(L-r)^2\dot{\theta}\,\hat{z}}_{\vec{L}_O^{(M)}} = cte \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = cte = \omega_0}$$

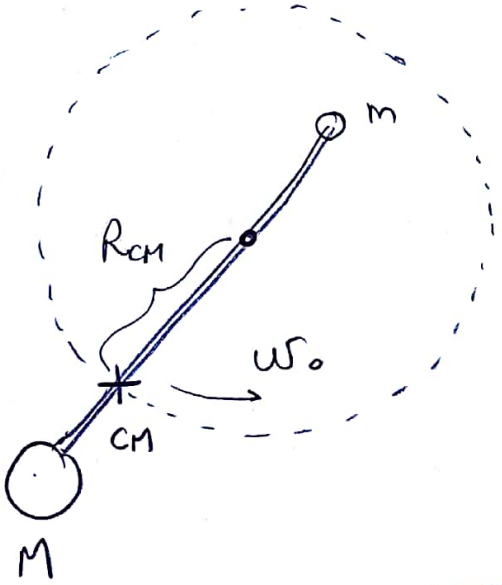
c) Calcule la posición y velocidad del CM en el tiempo

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m\vec{r}_m + M\vec{r}_M}{m+M} = \underbrace{\frac{mr - M(L-r)}{m+M}}_{R_{CM}} \hat{r}$$

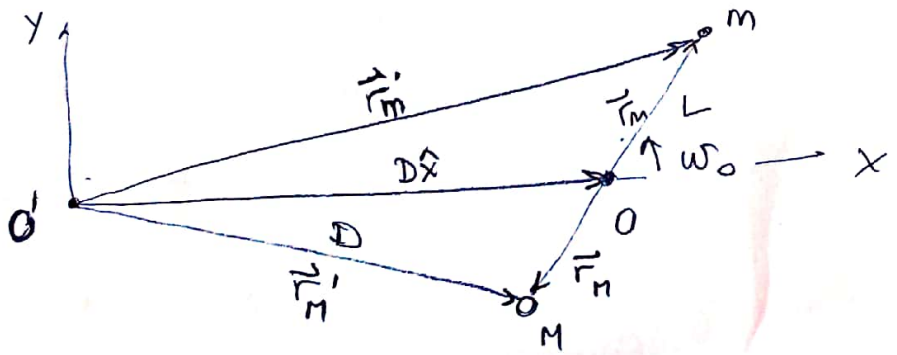
respecto de O

R_{CM} → puede ser negativo.

$$\boxed{\dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{mr - M(L-r)}{m+M}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = R_{CM}\,\omega_0\,\hat{\theta}}$$



d) Calcule el impulso angular con respecto al punto O' situado a una distancia D del punto O



$$\vec{r}_m' = D\hat{x} + \vec{r}_m$$

$$\vec{r}_M' = D\hat{x} + \vec{r}_M$$

$$\vec{L}_{O'} = m\,\vec{r}_m' \times \dot{\vec{r}}_m' + M\,\vec{r}_M' \times \dot{\vec{r}}_M'$$

$$= m\left(D\hat{x} + \vec{r}_m\right) \times \dot{\vec{r}}_m + M\left(D\hat{x} + \vec{r}_M\right) \times \dot{\vec{r}}_M$$

$$= \vec{L}_O + m\,D\left[\hat{x} \times r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right] + M\,D\hat{x} \times \left[-(L-r)\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right].$$

$$= \vec{L}_O + D\cos\theta\left[mr - M(L-r)\right]\dot{\theta}\,\hat{z}$$

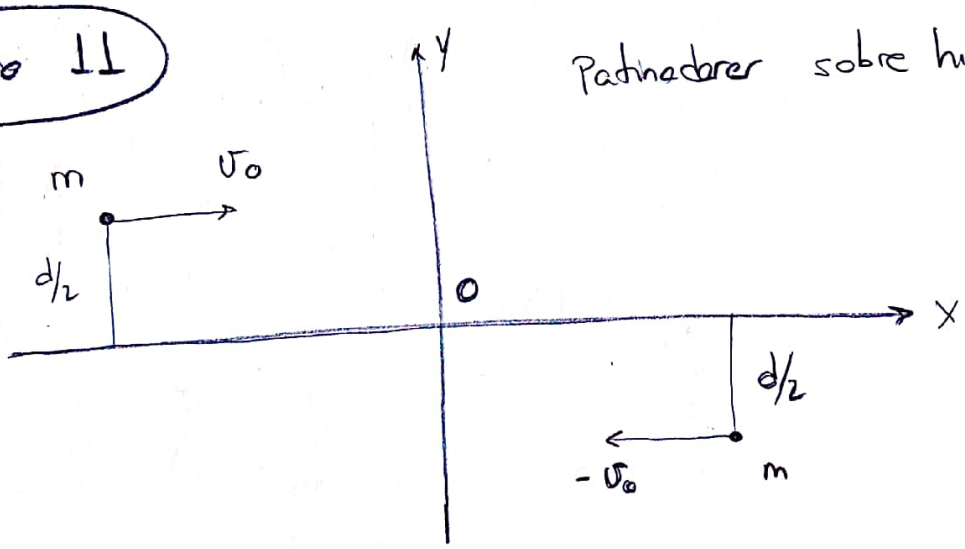
$\hat{x} \times \hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{z}$

$(\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O' = \vec{L}_O + D\left[(m+M)r - ML\right]\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{z}}$$

Ejercicio 11

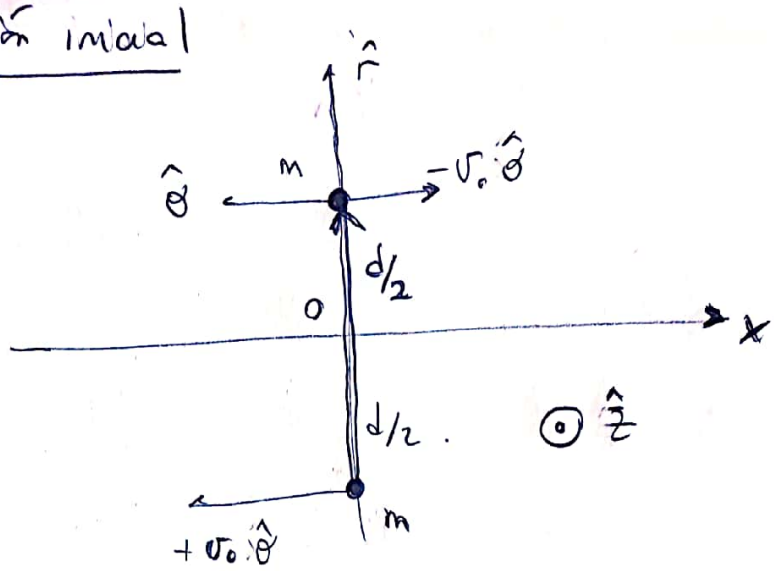
Patinadores sobre hielo:



Cuando están a una distancia d se unen por medio de una varilla sin masa

a) Describe el movimiento posterior

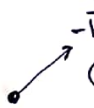
Situación inicial



DCL:

$\otimes\ \vec{P}_1 = -mg\hat{z}$

$\odot\ \vec{N}_1 = -\vec{P}_1$



$\otimes\ \vec{P}_2 = -mg\hat{z}$

$\odot\ \vec{N}_2 = -\vec{P}_2$

Fuerzas en el sistema patinadores - barra:

Peso $\longrightarrow$ Externa

- No hace torque (respecto de O)

$$\vec{r}_1 = \frac{d}{2}\hat{r}\ ,\quad \vec{r}_2 = -\frac{d}{2}\hat{r}.$$

$$\vec{M}_{peso} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2$$

$$= \frac{d}{2}\hat{r} \times (-mg\hat{z}) + \left(-\frac{d}{2}\hat{r}\right) \times (-mg\hat{z})$$

$$= 0.$$

- No hace trabajo.

Normal $\longrightarrow$ externa

- No hace torque (respecto de O)

$$\vec{M}_{Normal} = \vec{r}_1 \times \vec{N}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{N}_2$$

$$= -\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = 0$$

- No hace trabajo.

Vínculo $\longrightarrow$ Interna $\longrightarrow$ No sabemos si hace trabajo a priori.

Conservación:

- Momento lineal: se conserva porque la resultante de fuerzas externas es nula:

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = cte = \underbrace{m_1 v_0 \hat{x} - m v_0 \hat{x}}_{\text{inicial!}} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{\vec{P}}{2m} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = cte = \frac{1}{2m}\left(m \frac{d}{2}\hat{r} + m\left(-\frac{d}{2}\hat{r}\right)\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = 0} \quad \boxed{\dot{\vec{R}}_{CM} = 0}$$

- Momento angular: La resultante del torque de fuerzas externas respecto de O es cero $\Rightarrow$ se conserva.

Nota: Que pasa si hubiera rozamiento? $\longrightarrow$ Hay que distinguir entre resultante de fuerzas externas y resultante del torque de las fuerzas externas.

$$\vec{L}_0 = m \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

$$= m r \hat{r} \times r \dot{\theta} \hat{\theta} + m(-r\hat{r}) \times (-r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\boxed{\vec{L}_0 = 2 m r^2 \dot{\theta} \hat{z} = cte}$$

$$\boxed{\vec{L}_0^{(inicial)}} = m\,\frac{d}{2}\,\hat{r}\times(-v_0\,\hat{\theta}) + m\left(-\frac{d}{2}\,\hat{r}\right)\times v_0\,\hat{\theta}$$

$$= -m\,d\,v_0\,\hat{z} = \boxed{\frac{1}{2}\,m\,d^2\,\omega_0\,\hat{z}}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_0 = \omega_0\,\hat{z} = -\frac{2v_0}{d}\,\hat{z}}$$ ← velocidad angular inicial

$$\Rightarrow \vec{L}_0 = 2mr^2\dot{\theta}\,\hat{z} = \vec{L}_0^{(inicial)} = \frac{1}{2}\,m\,d^2\,\omega_0\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{(d/2)^2}{r^2}\,\omega_0}$$

<u>Nota</u>: <u>A radio fijo $r = d/2$</u> $\rightarrow$ $\dot{\theta} = \omega_0 = cte$.

<u>Newton</u>: $\hat{r}\,]\;m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$ (idem para el otro pelotudo).

$\hat{\theta}\,]\;m(\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}_{=0}) = F_\theta$

$= 0$ x conservación del impulso angular.

F_θ → fza de vínculo que hace la barra.

La fuerza de vínculo (<u>no</u> conservativa) <u>no</u> hace trabajo.

porque el movimiento es angular y la fuerza es radial.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{se conserva la energía}}$

¿Como evoluciona el sistema si se suelta la varilla?