universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Física 1 (Química)
Laboratorio

- Estadística y Péndulo -

Verano 2021

JTP Nicolás Torasso nicolas.Torasso@gmail.com

Ay1ra Magalí Xaubet xmagali@gmail.com

Ay 2da Adán Garros adangarros@gmail.com

Lunes y Miércoles 14:30-18:30 hs

Prof. Gustavo Lozano

Hoy

- Repaso y puesta en común Actividad 1
- Histogramas
  - Interpretación, confección, normalización
- Procesos estocásticos, distribuciones. Bibliografía en la página.
- Estimadores de una población: la distribución subyacente
- Pasaje al continuo
- La campana de Gauss: propiedades.
- Probabilidad de ocurrencia
- Distribución de los promedios
- Error de una medición vs error del promedio
- Error de medición de un proceso estocástico
- El péndulo: motivación
- Objetivo del experimento
- Esposición materiales para el experiment
- Instructivo cargar datos en Excel.

Repaso

- Cómo expresamos mediciones:

$$x = (x_0 \pm \Delta x) \text{ unidad}$$

Ej.: L = (10,2 ± 0,3) cm

Valor más probable

Error absoluto

- Cómo calculamos el error absoluto:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x^2_{\text{instrumental}} + \underbrace{\Delta x^2_{\text{definicion}} + \Delta x^2_{\text{interaccion}}}_{\text{Estimados por nosotrxs}}}$$

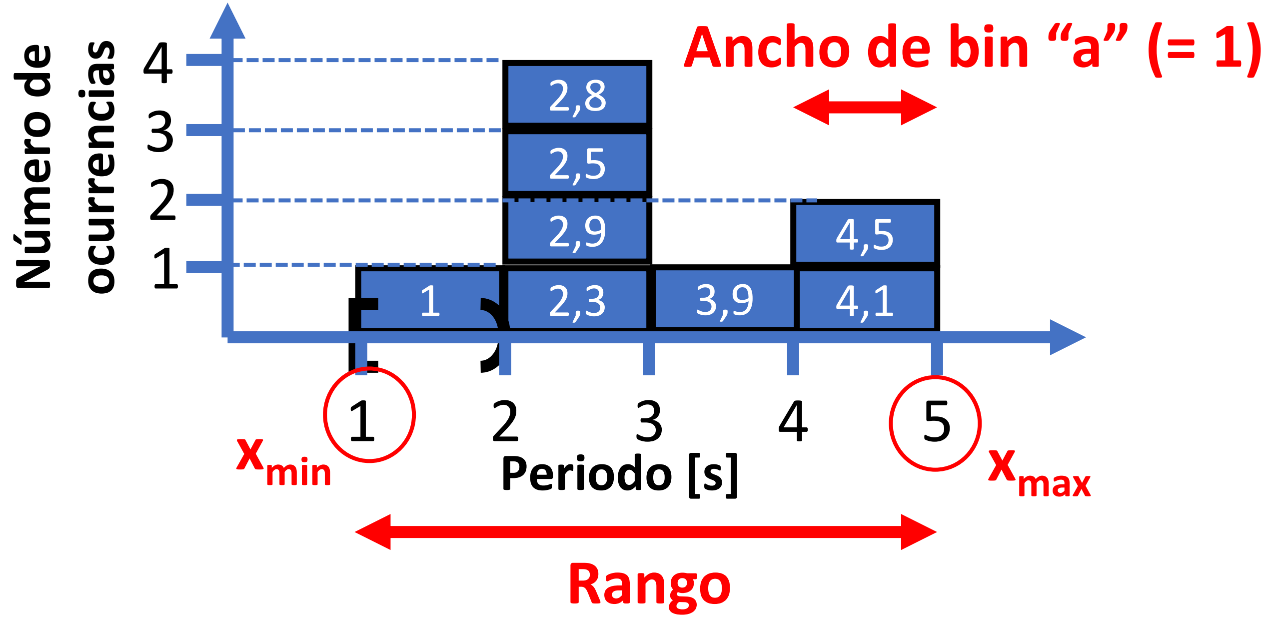
Dado por el fabricante

Puesta en común (~ 20 min)

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Histograma

- Es un gráfico que permite visualizar la distribución de resultados de una medición: con qué frecuencia se obtuvo resultados en cada intervalo.



Datos [s] **N = 8 mediciones**

2,3
2,9
1
4,1
3,9
4,5
2,5
2,8

Cómo elegir ancho de bin

$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$$

Cantidad de bines "k" (= 4)

¿Se les ocurren otros ejemplos?

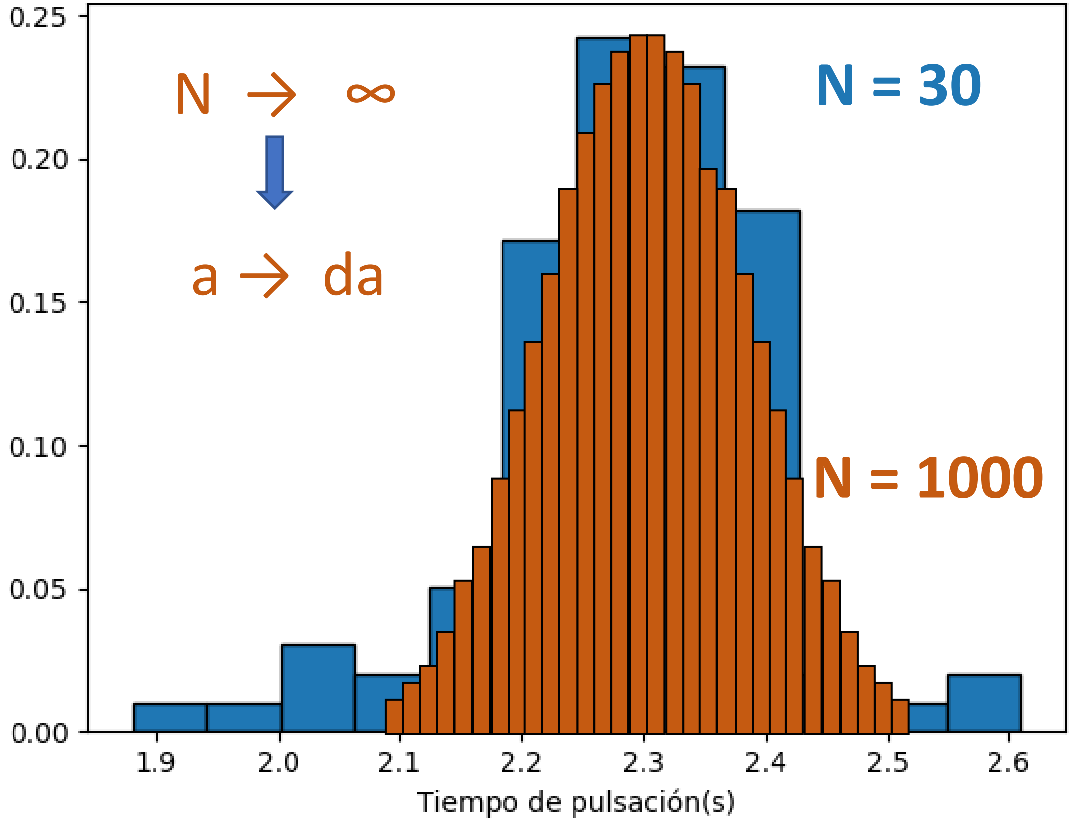
Histograma: ¿cómo elijo k?

- La regla de Sturges (no es la única posible) dice que:

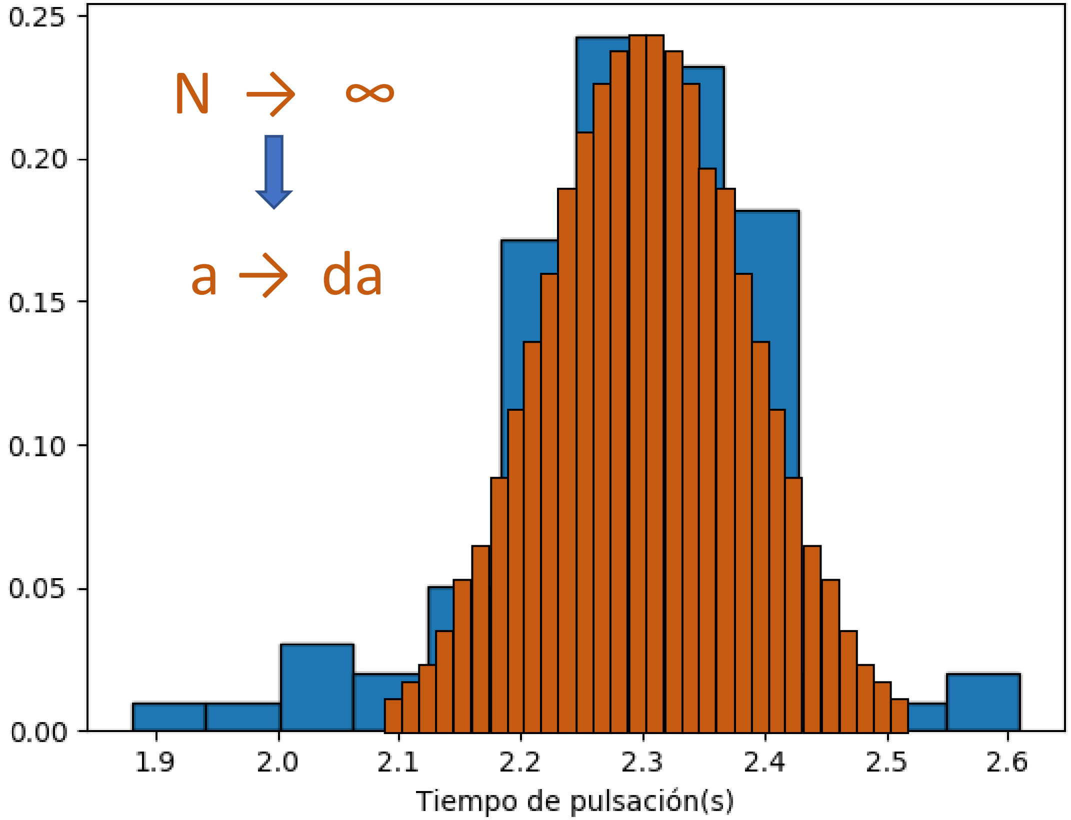
$$\boxed{k = 1 + \; log_2 (N)}$$

- Cuantos más datos, más bines.
- ¿Qué pasa cuando N → infinito?

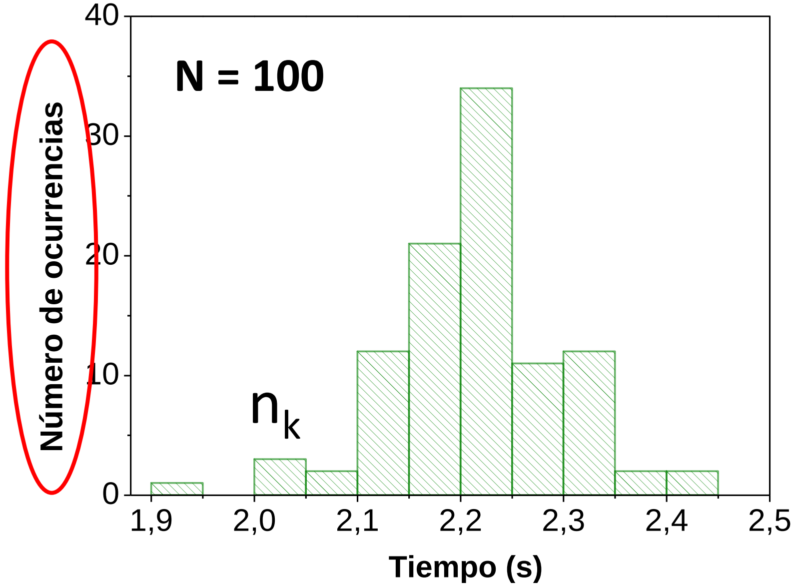
$$a \xrightarrow{N \to \infty} 0$$



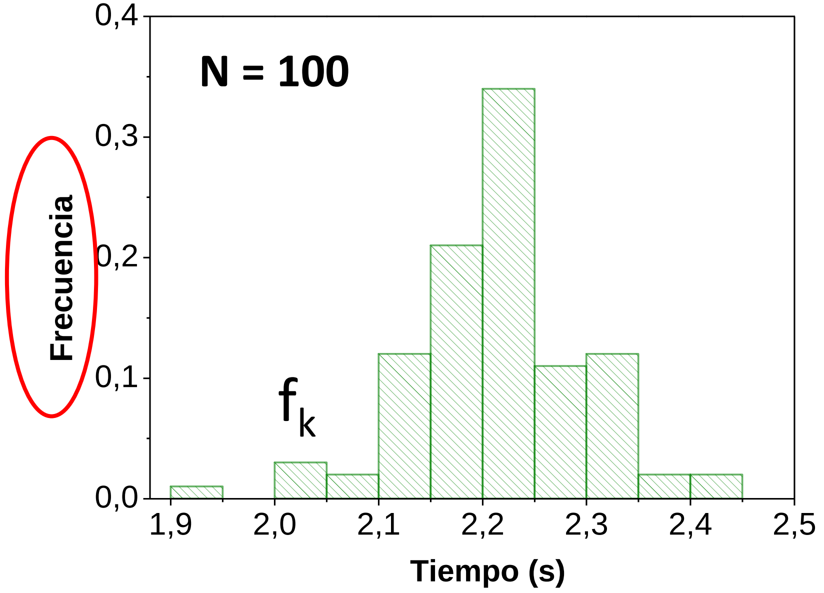
¿Qué hay de raro en estos histogramas?



Normalización



$$f_k = \frac{n_k}{N}$$



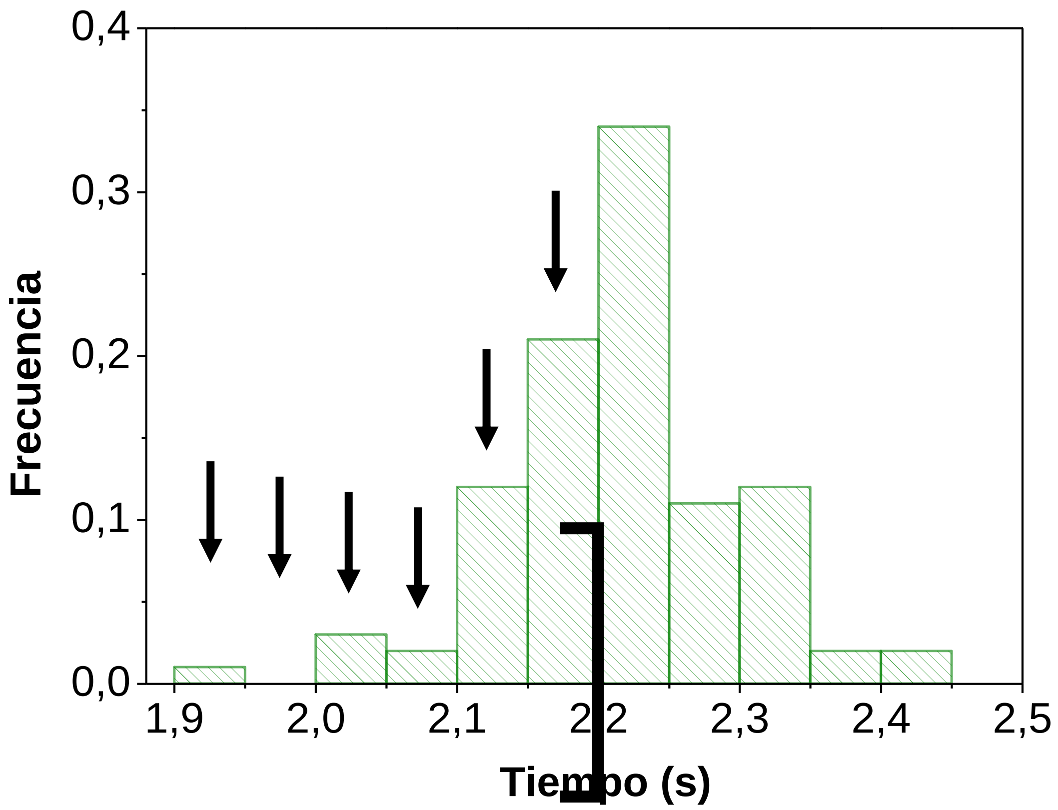
$$\frac{Número\ de\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$

$$\sum_i f_i = 1$$ Condición de Normalización

- Sirve para comparar la forma de distribuciones tomadas con **distinto N**

Interpretación de histograma normalizado

- f_k es la **probabilidad** de que una medición caiga en el intervalo k.
- ¿Cuál es la **probabilidad** de que una medición de menor a 2,2 s?



¿Y en otro intervalo cualquiera?

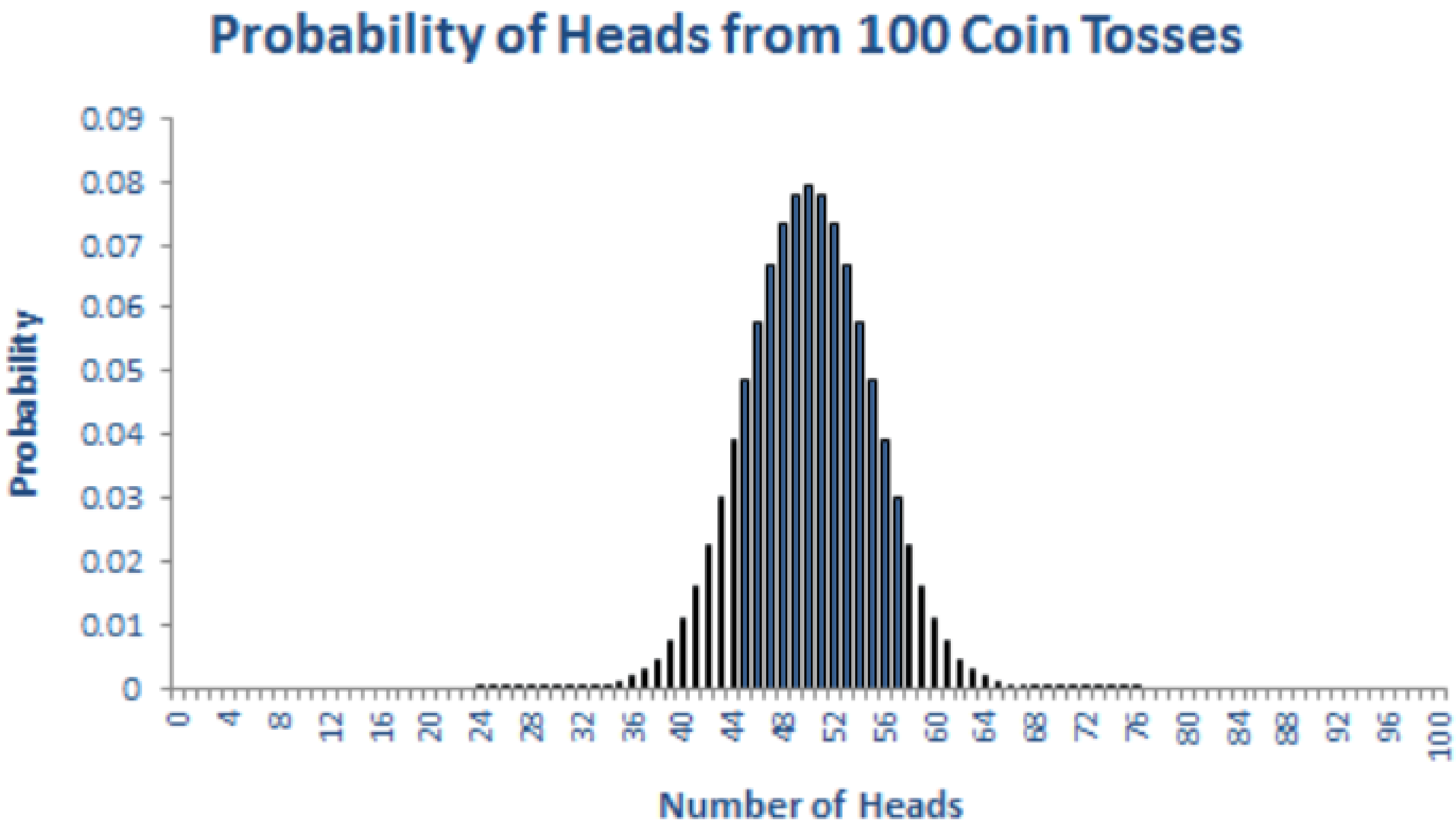
Sumo las alturas de los bines normalizados

Los procesos estocásticos

- El tipo de distribución depende del fenómeno que medimos.
- Usualmente, pensamos al proceso de medición como tirar una moneda: no siempre sale cara o ceca, pero hay una **distribución subyacente** que gobierna el fenómeno físico.

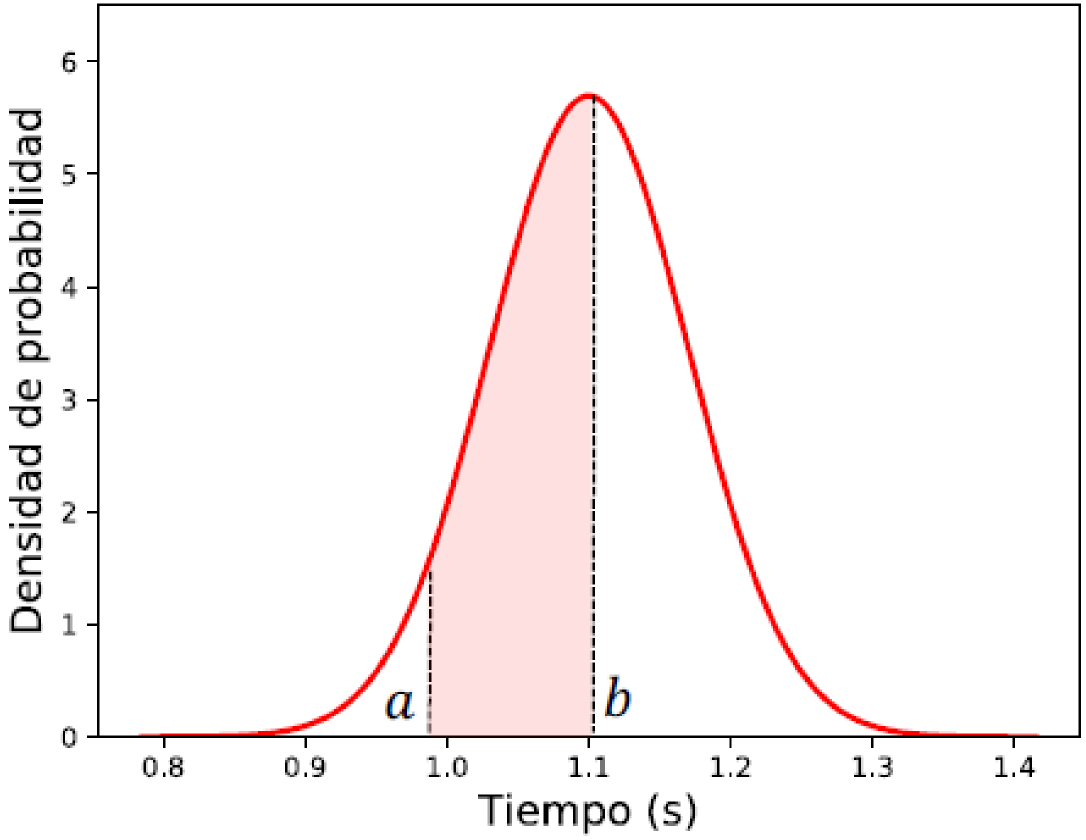
- Lo que queremos es obtener información de esa distribución.

El ejemplo de la moneda



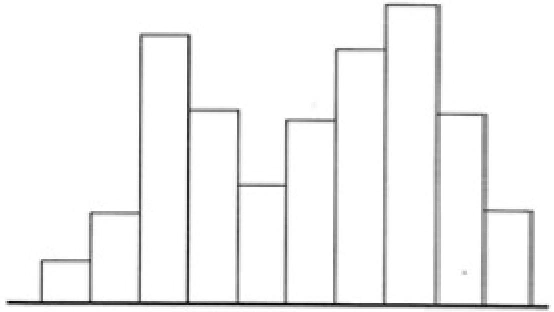
universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Interpretación de histograma normalizado



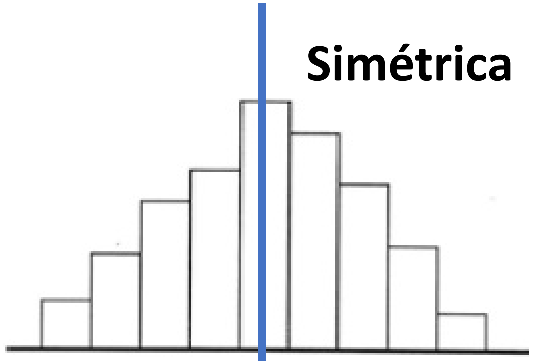
$$Prob\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

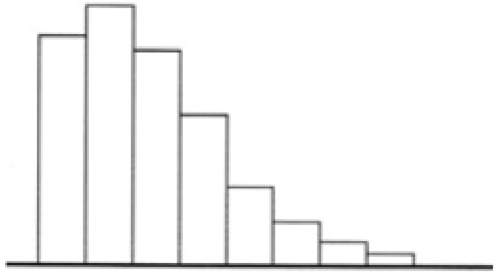
Distribuciones



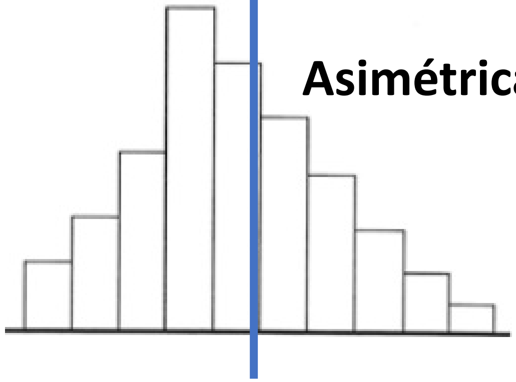
Bimodal

Simétrica





Asimétrica

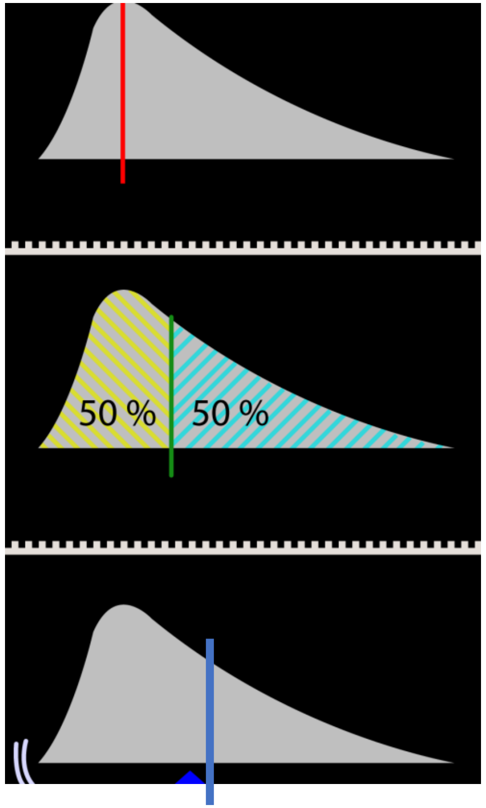


Indicadores de tendencias

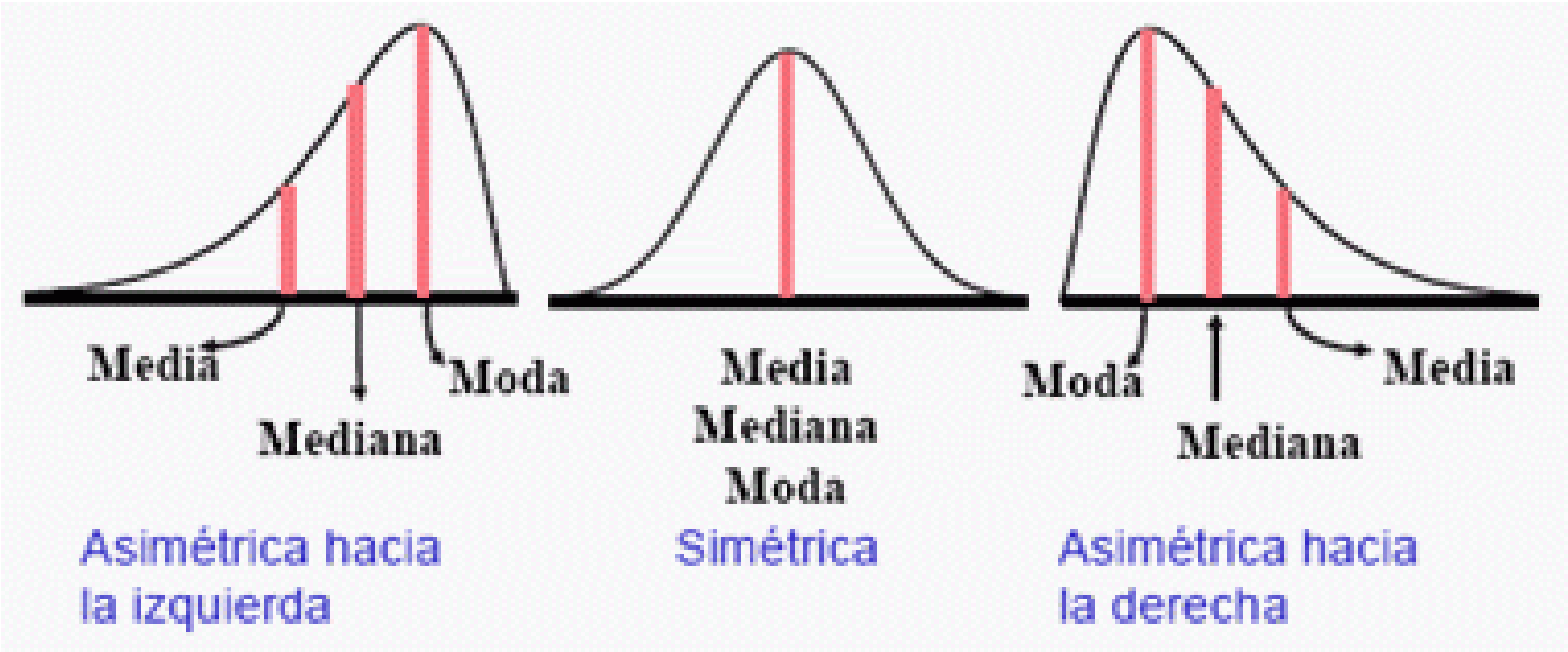
Moda: valor de la variable que mas veces se repite, es decir, aquella cuya frecuencia absoluta es mayor.

Mediana: valor que separa las observaciones a la mitad. 50% de estas son menores que la mediana y el otro 50% son mayores.

Media o promedio: $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$$



Simetría


Media
Mediana
Moda
Asimétrica hacia
la izquierda
Media
Mediana
Moda
Simétrica
Moda
Mediana
Media
Asimétrica hacia
la derecha

Estimadores

- Los **estimadores** son funciones de los datos que sirven para estimar algún parámetro de la distribución subyacente. Ejemplos:

Promedio (media)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Varianza

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Desviación estándar

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Desviación estándar de una muestra (S)

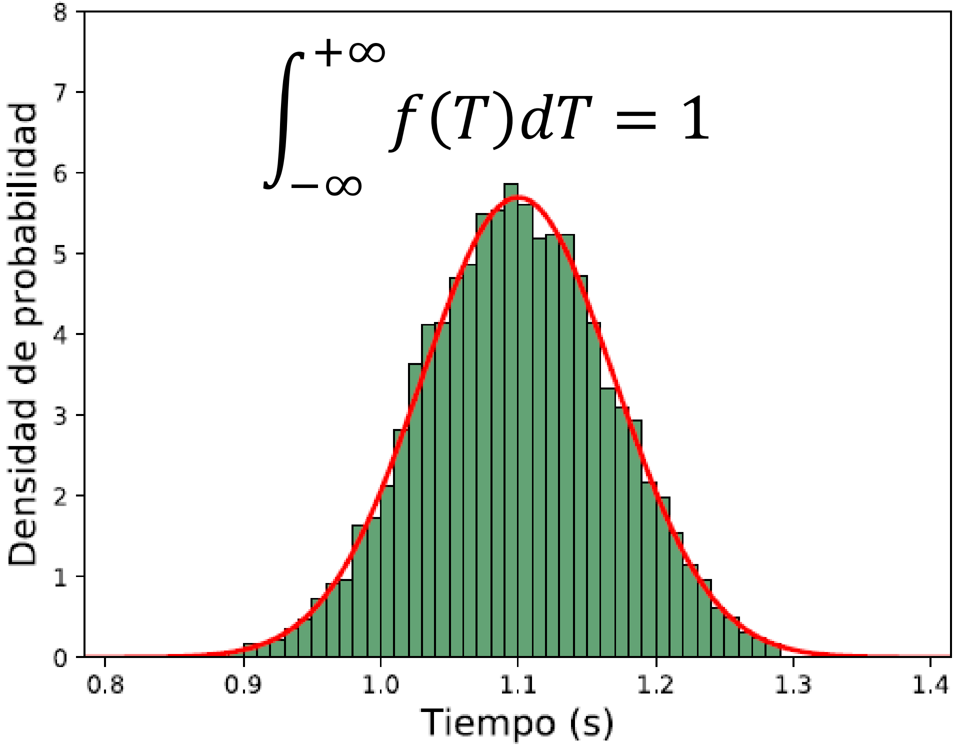
Esta cantidad es una "medida" de la distribución de las mediciones alrededor del valor mas probable. Nos da una idea de cuán dispersos están los datos alrededor del valor promedio.

En el caso de una población (no una muestra), **S pasa a ser σ**

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \underset{\text{N grande}}{\approx} \boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}}$$

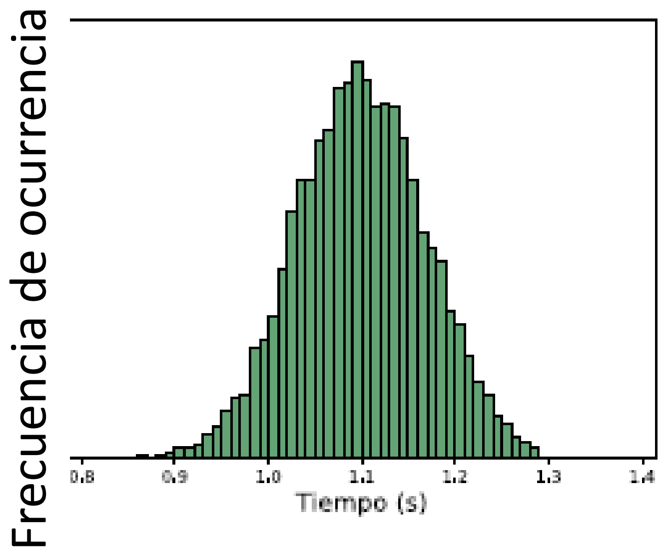
Pasaje al continuo

Cuando N tiende a infinito, la distribución se asemeja a una **densidad de probabilidad**: es decir, a la distribución subyacente



f(T) es la función de distribución de probabilidades

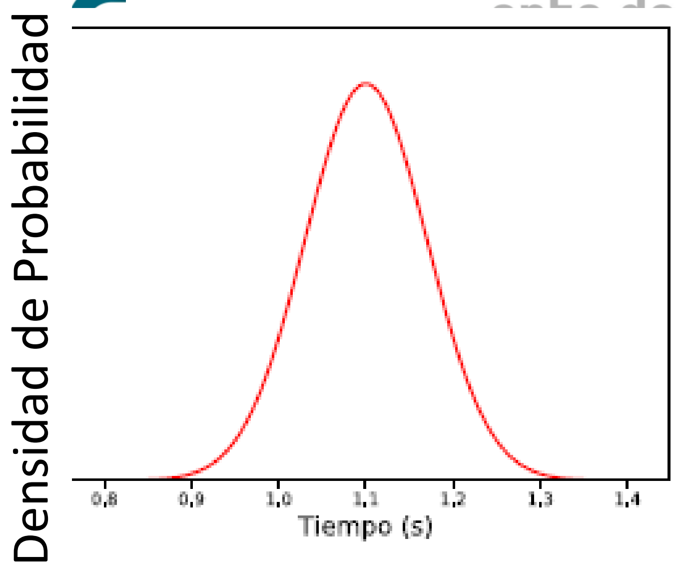
DISCRETO



$$F_k \rightarrow f(x)dx$$

$$N \rightarrow \infty$$
$$a \rightarrow 0$$

CONTINUO



$$\sum_k F_k = 1$$

Condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_k n_k x_k = \sum_k x_k F_k$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$VAR(X) = \sum_k (x_k - \bar{X})^2 F_k$$

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x)dx$$

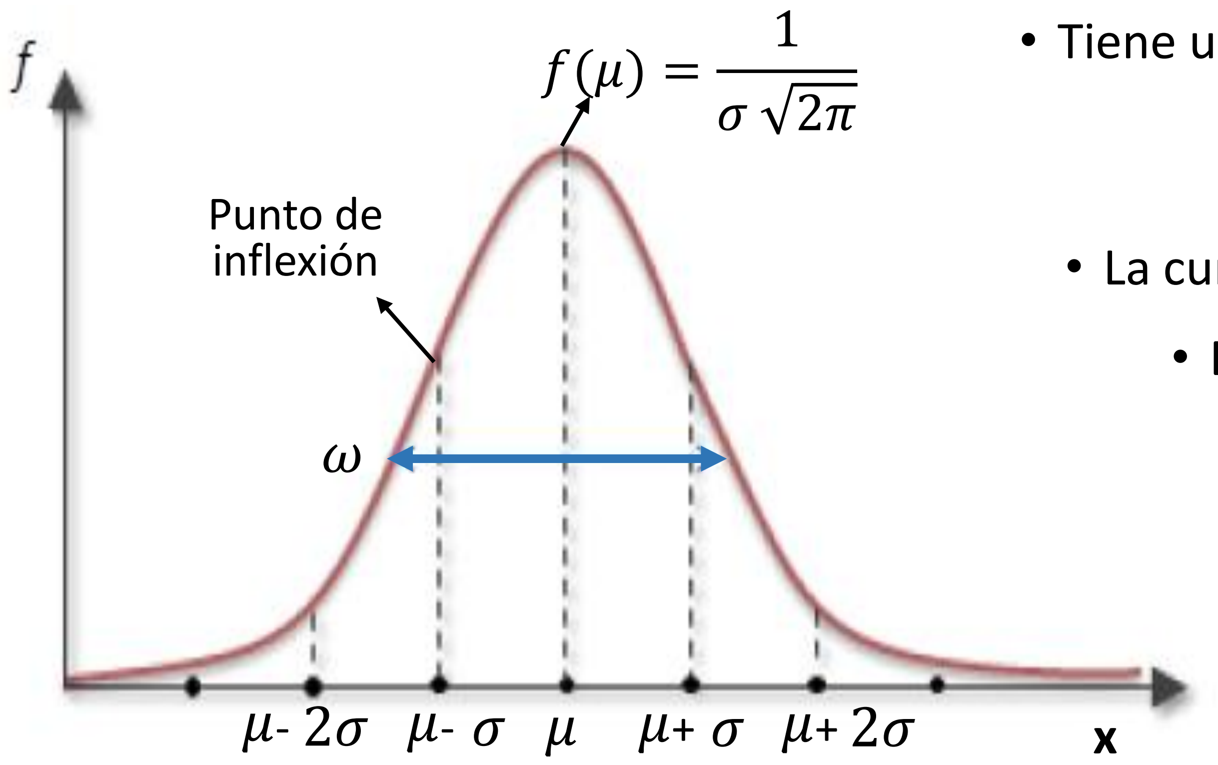
Desviación estándar $S = \sqrt{VAR(X)}$

Desviación estándar $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$

Intervalo (15’)

La función (campana) de Gauss

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$



Algunas propiedades relevantes

Por ahora

- Es simétrica con respecto a su media
- Tiene una única moda, que coincide con la media y mediana

Moda=Mediana=Media

- La curva normal es asintótica al eje de abscisas
- El área total bajo la curva es igual a 1

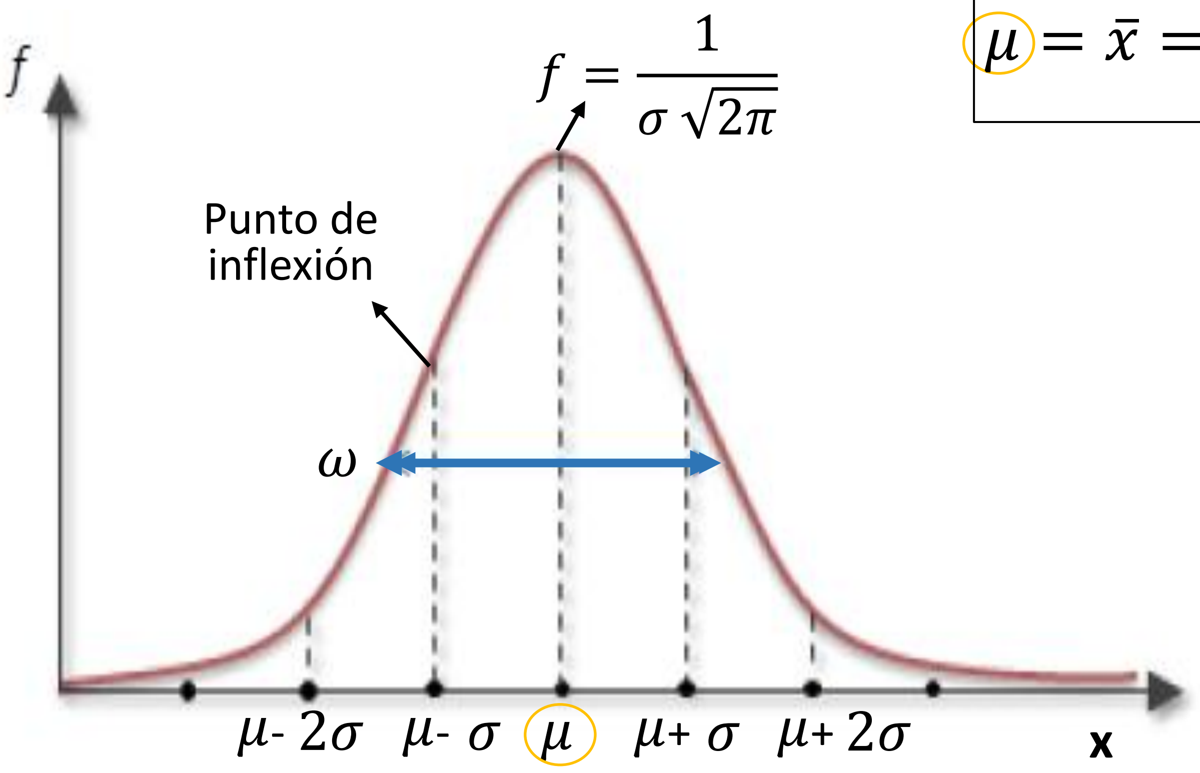
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$

Gauss: la media

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

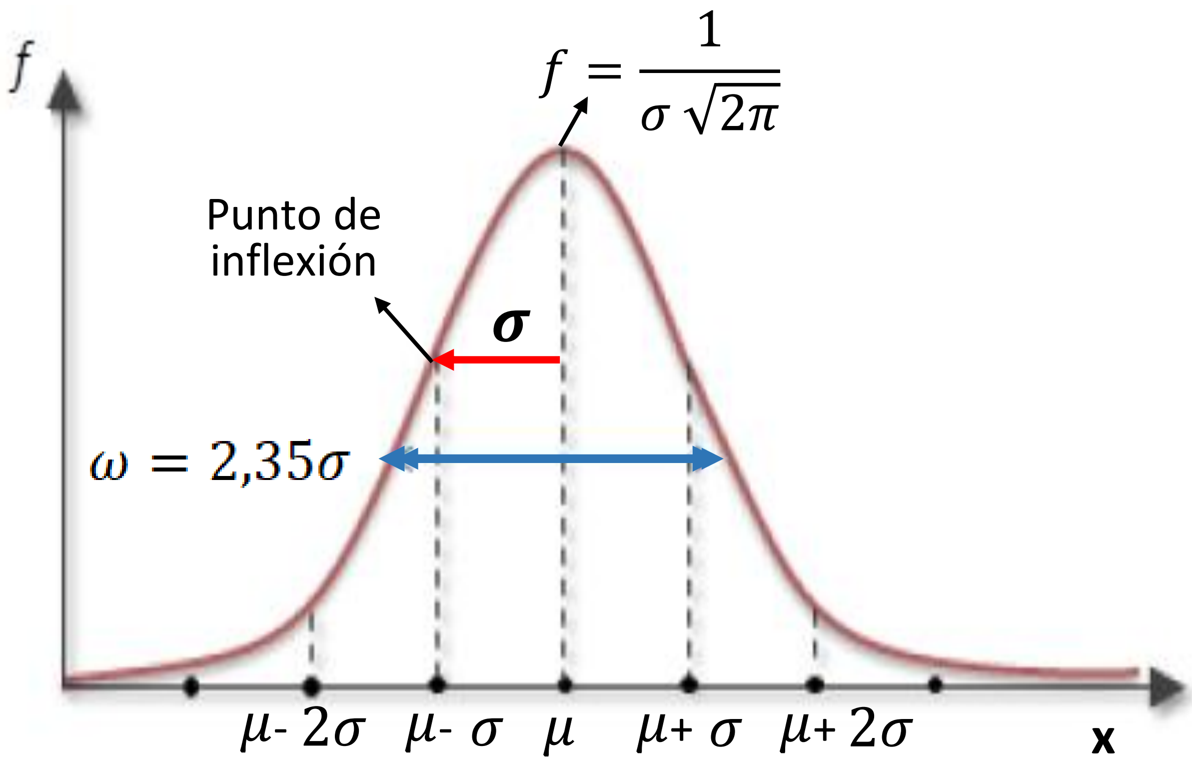
$$\boxed{\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$$



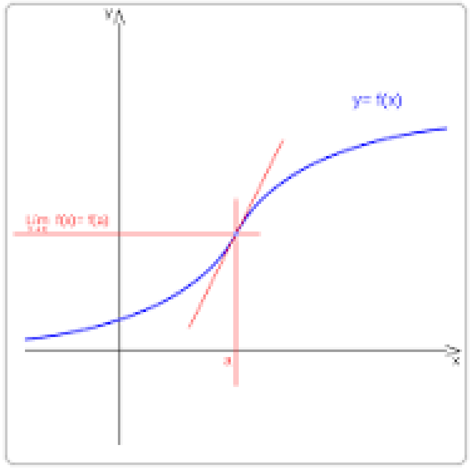
Gauss: la desviación estándar

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



$$\boxed{\sigma^2 = \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx}$$

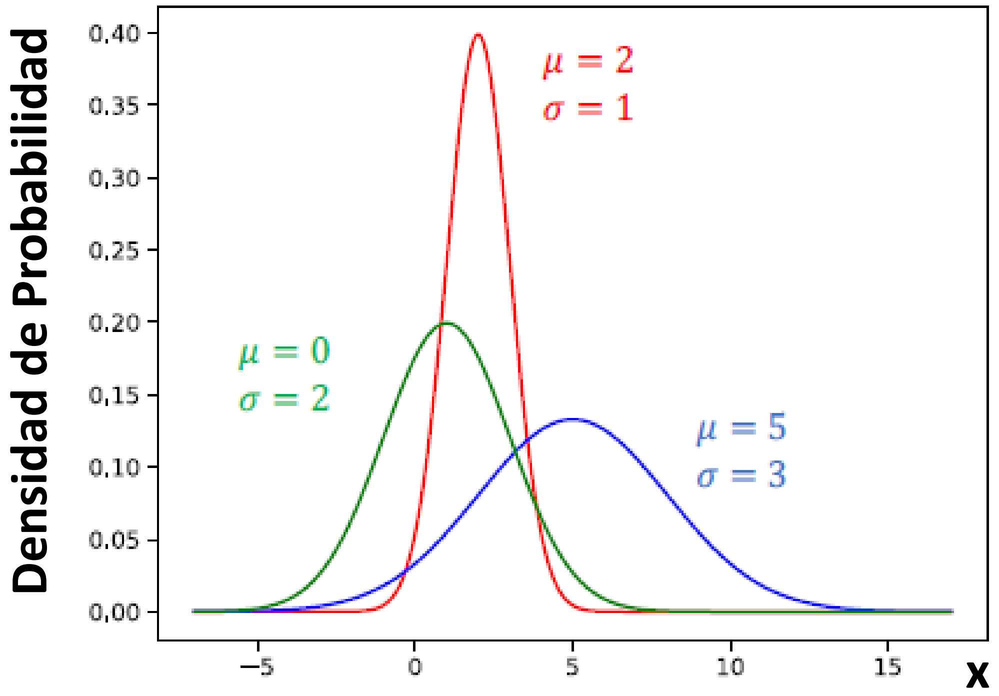


Gauss: características

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- → Está centrada en $x = \mu$
- → Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- → Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$
- → El parámetro σ da una idea del ancho de la curva

Función de distribución de 3 Muestras



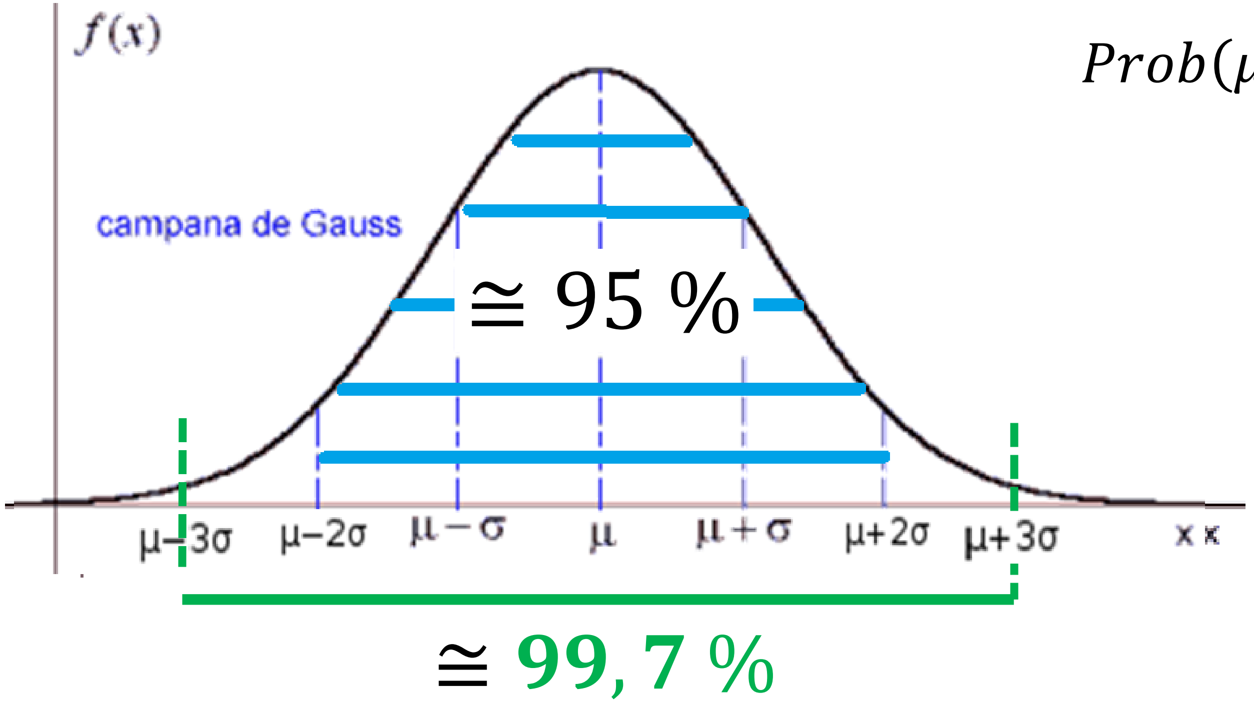
↑ μ Corrimiento en x

↑ σ Aumento del ancho

Gauss: características

Supongamos que tenemos una muestra de 1000 datos. Por ejemplo se midieron mil veces la misma MF, con el mismo instrumento, protocolo y operador.

¿Cual es la probabilidad que si hago una medición mas el resultado se encuentre en el intervalo? $(\boldsymbol{\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma})$

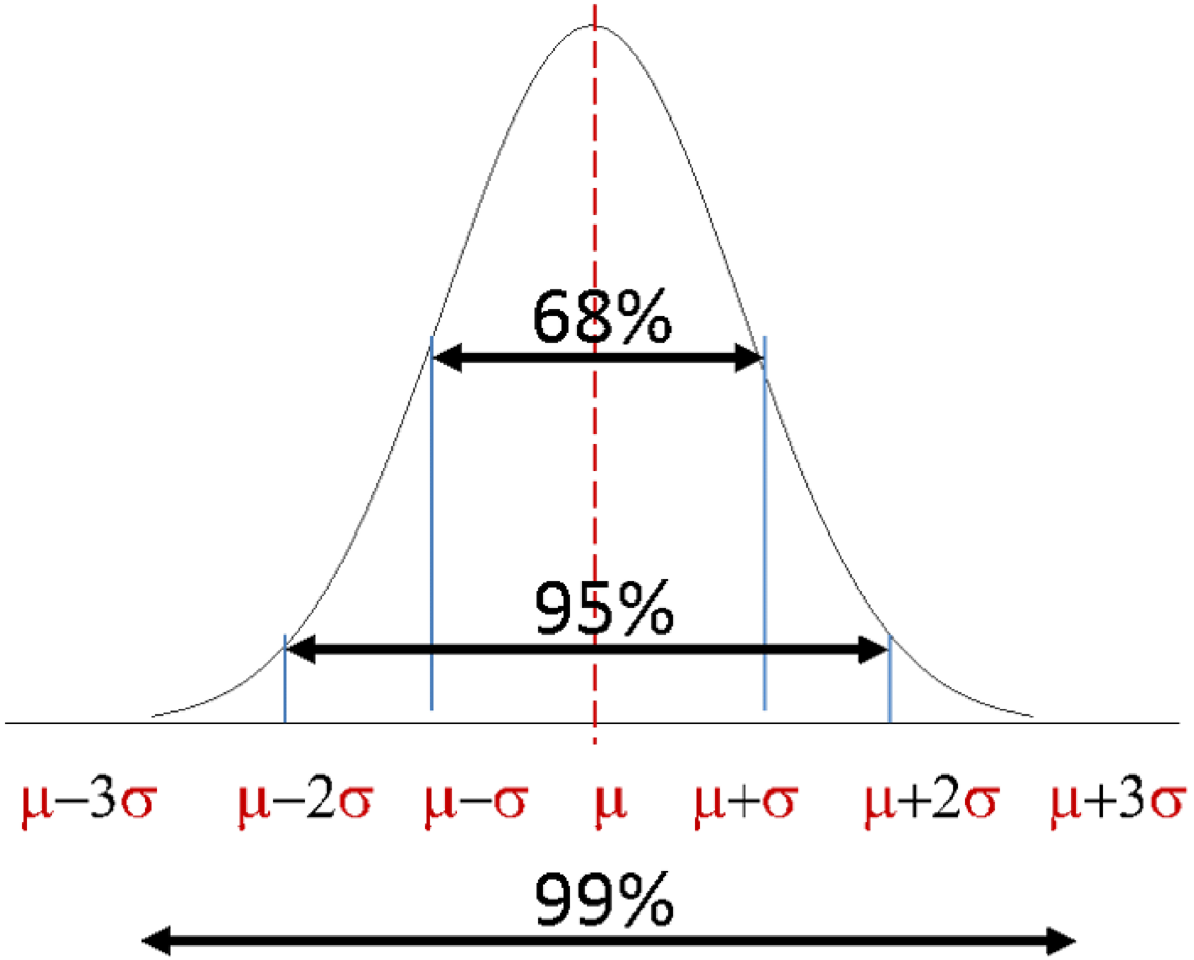


$$Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) =$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx \cong 0{,}95$$

$$\boxed{\boldsymbol{Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0,997}}$$

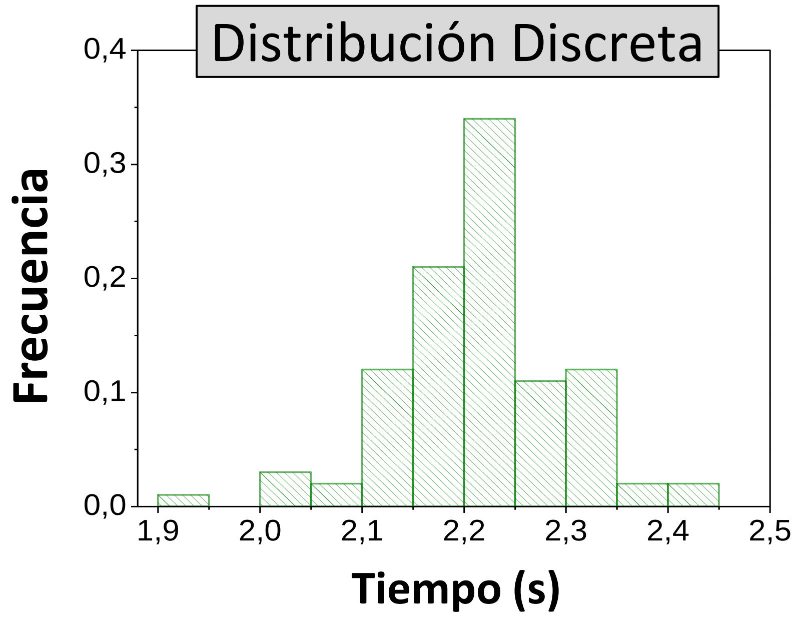
Gauss: la desviación estándar



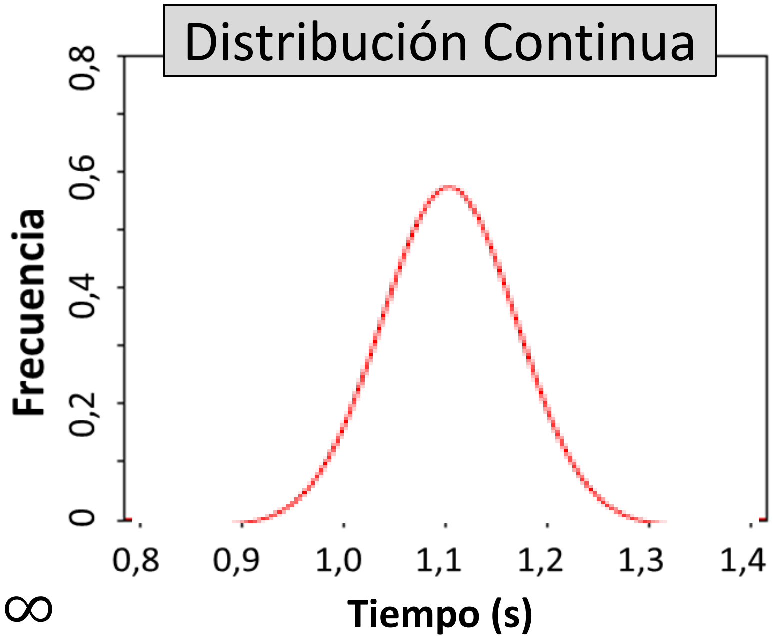
Objetivo de una medición estadística

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos estimamos los parámetros de la distribución



$N \rightarrow \infty$

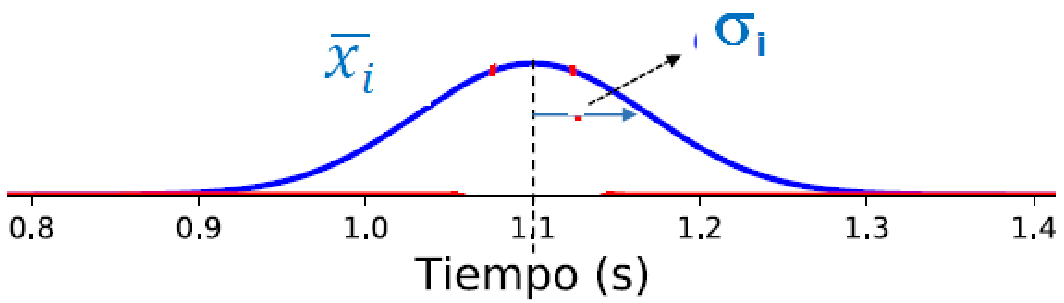


$\bar{x} \rightarrow \mu$

$S \rightarrow \sigma$

Error estadístico

Si se toma **1 muestra con N medidas y saco un $\overline{x_1}$ y un σ_1**



Si tomo **otra muestra (<u>mismo proceso, misma MF</u>) de N medidas voy a sacar otro valor de $\overline{x}_2$.**

¿Como va a ser σ_2 respecto de σ_1?
¿En cuanto difiere $\overline{x}_2$ respecto de $\overline{x}_1$?

¿ Cómo informo el resultado de la medición?

¿Cuál es el intervalo en el que hay un 68 % de probabilidades que se encuentre el valor de $\overline{x}_2$??

Error estadístico

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\sigma_1 \cong \sigma_2 \cong \sigma$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana**, centrada en: $< \bar{x} >$

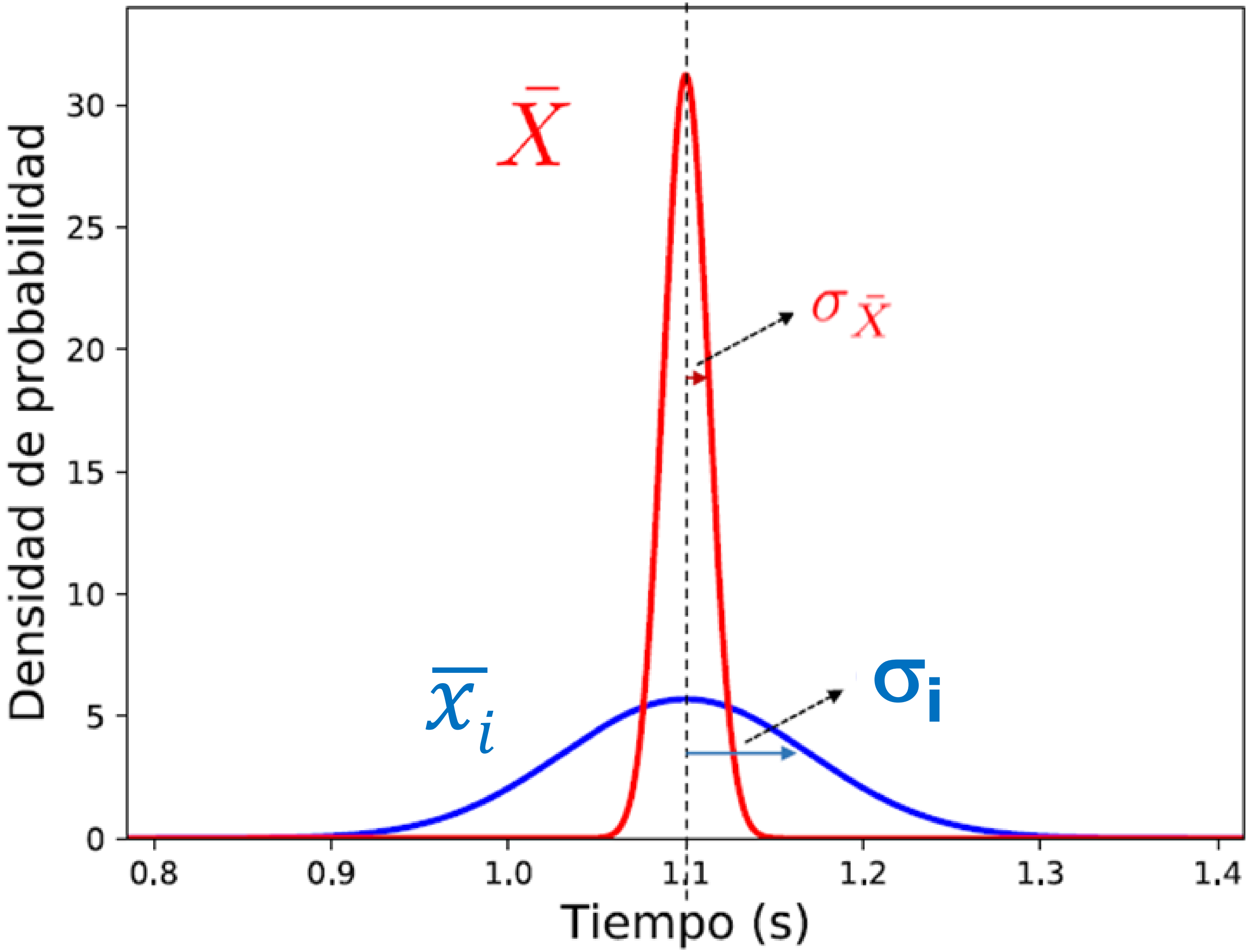
$$\boxed{< \bar{x} >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

con una dispersión estándar $\sigma_{<\bar{x}>}$ dada por:

$$\boxed{\sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Error estadístico: visualización



$$<\bar{x}> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_{<\bar{x}>} = \boldsymbol{\sigma_e} = S_e$$

ERROR ESTADISTICO

Medición de un promedio

En general se mide 1 sola serie de N mediciones. Entonces, sabiendo como se va a comportar el valor medio de la serie de otro experimentador que mide la <u>misma magnitud física</u>, con el mismo protocolo y con el mismo numero de datos, se escribe el resultado de mi serie de mediciones como:

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\ \text{Unid}} \qquad \Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2} \qquad \sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

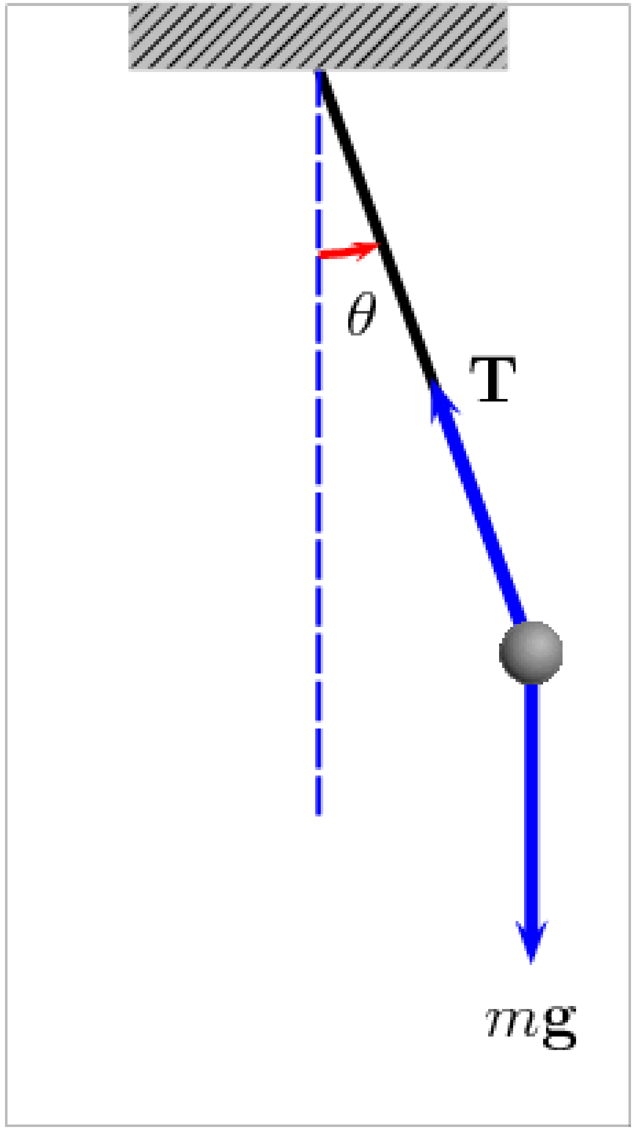
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Simulación proceso gaussiano

- https://colab.research.google.com/drive/11_-rtrES4wR-RL9LbLtcBC6vp8fLR9DZ?usp=sharing

Intervalo (10’)

El péndulo



$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Objetivos de práctica del péndulo

- Encontrar la mejor estrategia experimental para obtener un resultado preciso y reproducible del periodo de un péndulo.
- Medir su período de oscilación y reportar correctamente su valor.
- Describir la distribución de los datos obtenidos a través de histogramas y un análisis estadístico de los mismos.
- Distinguir conceptualmente la diferencia entre la distribución del periodo y la distribución de los promedios del período.

Materiales para el experimento

Cómo hacer histogramas en Origin

El miércoles

- Elección de N en mediciones con procesos aleatorios
- El criterio de Sturges
- Cifras significativas en el error
- Superposición de histogramas en Origin