universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Física 1 (Química)
Laboratorio

- Mediciones Indirectas -

Verano 2021

JTP Nicolás Torasso nicolas.Torasso@gmail.com

Ay1^{ra} Magalí Xaubet xmagali@gmail.com

Ay 2da Adán Garros adangarros@gmail.com

Lunes y Miércoles 14:30-18:30 hs

Prof. Gustavo Lozano

Hoy

- Puesta en común: mediciones del péndulo
- Ejemplo: medición indirecta con balanza
- Propagación de errores
  - General
  - Suma y resta
  - Producto y división
- Ejemplo cálcuo de g a partir del período del péndulo

Definiciones

Mediciones directas: son aquellas en las cuales el resultado es obtenido directamente del instrumento que se esta utilizando.

Por ejemplo, la longitud de una pieza mas corta que la cinta métrica que tengo o la regla que tengo. El valor se obtiene directamente de la medición.

Mediciones indirectas: Involucra siempre un cálculo en el que se usan los valores de magnitudes medidas en forma directa. Se necesita conocer la relación funcional.

Por ejemplo, el volumen de una pieza, o simplemente el largo de una pieza, cuya longitud es mayor que el rango de mi instrumento

¿Cómo expresamos resultados de una medición?

RESULTADO

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

$$[\bar{x} - \Delta x \,, \bar{x} + \Delta x] \text{ Unidad}$$

Se Expresa

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidad}}$$

$\bar{x} \rightarrow$ Valor más representativo

$\Delta x \rightarrow$ Incerteza Absoluta
Error Absoluto

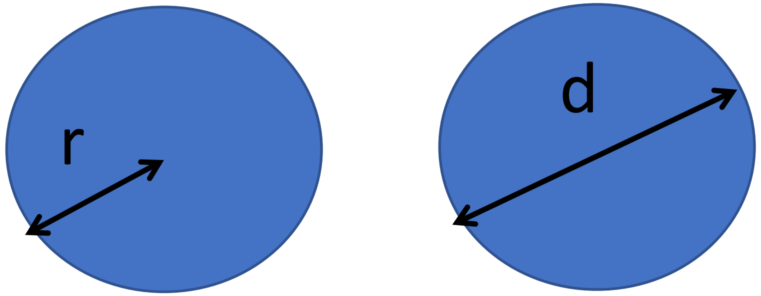
¿Cómo expresamos el resultado de una medición indirecta?

IGUAL. Pero ahora tanto el valor representativo como el error absoluto se calculan a partir de:

los valores obtenidos de mediciones directas

Ejemplo: área de una figura

- El caso del círculo:



¿Qué mido en FORMA DIRECTA ?

¿Qué calculo?

$$\mathrm{d} = (\mathrm{d}_0 \pm \Delta \mathrm{d})\ \mathrm{u} \qquad \mathrm{A} = \frac{\pi}{4}\mathrm{d}^2$$

$$\boxed{\mathrm{A} = (\mathrm{A}_0 \pm \Delta \mathrm{A})\ \mathrm{u}}$$

$\mathrm{A}_0 = ??$ $\quad \Delta \mathrm{A} = ??$

Queremos determinar el valor de una magnitud y a partir de la medición directa de una magnitud x:

$$\boxed{x = (x_0 \pm \Delta x) \qquad y = f(x)}$$

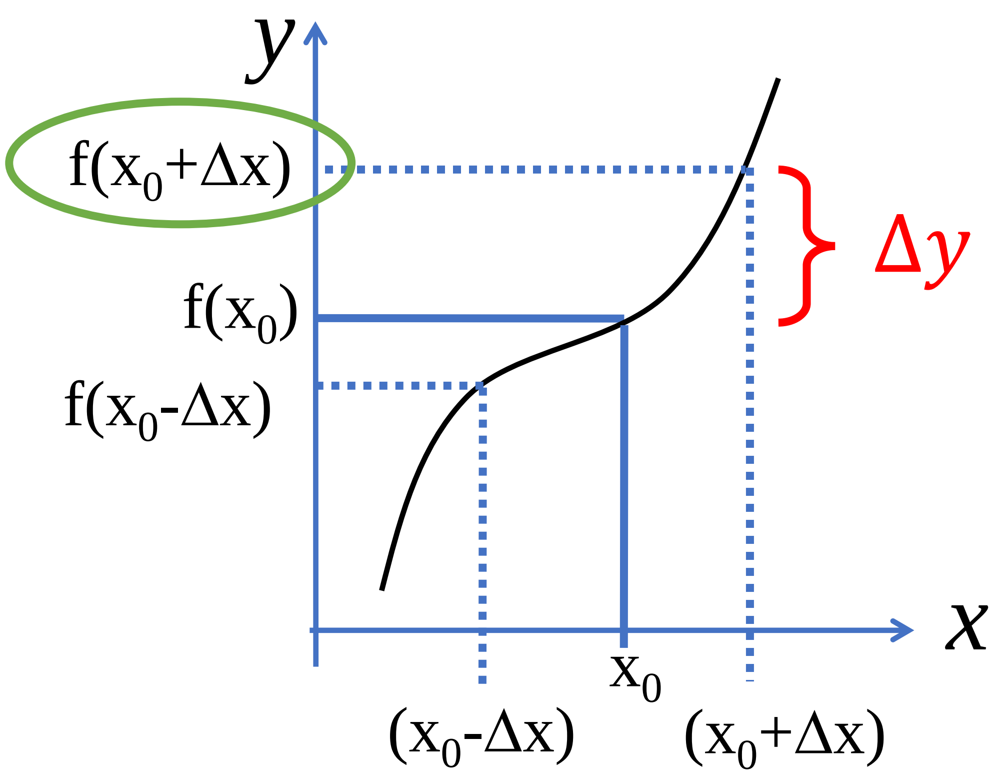
La propagación de un error

$$\boxed{x = (x_0 \pm \Delta x) \qquad\qquad y = f(x)}$$

¿Cuánto vale Δy?

¿Cuánto vale *y* en caso de que el valor real de *x* sea $x_0 + \Delta x$?

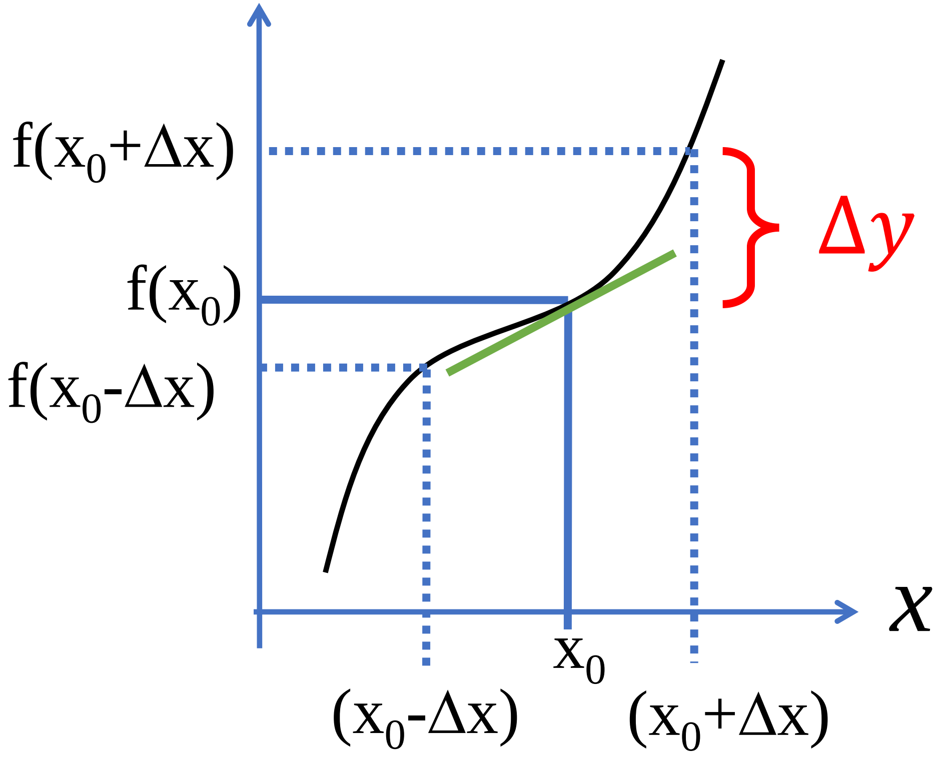
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



Propagación de errores

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Pero, para Δx pequeños, podemos aproximar (Taylor)



$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \sim f'(x_0)\Delta x$$

Pendiente de la recta tangente a $f(x_0)$
Cuanto más "empinada", más error

Propagación de errores

Entonces, para función de una variable, expreso el resultado:

$$y = (y_0 \pm \Delta y)$$

donde

$$\boxed{y_0 = f(x_0) \qquad \Delta y = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \Delta x}$$

¡Módulo!
porque la incerteza debe ser positiva

Ejemplo: período del péndulo

Supongamos que queremos medir el periodo *t* de un oscilador, es decir, el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa.

Disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo: 0,1s. Decido medir 10 veces y obtener el periodo en forma indirecta:

$$t = \frac{T}{10}$$

Lo que mido en forma DIRECTA es T (el tiempo de 10 oscilaciones)

Lo que mido en forma INDIRECTA es t (el período de 1 oscilación)

Medimos T y supongamos que nos da T_0 = 4,6 s $\qquad T = (T_0 \pm \Delta T) = (4{,}6 \pm 0{,}1)$s

t= $f(T) = \mathrm{T}/10$

t_0 = ??? $\quad \Delta t = ???$

$$\boxed{y_0 = f(x_0) \qquad \Delta y = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \Delta x}$$

Ejemplo: período del péndulo

t= $f(T)$ = T/10

$$\boxed{y_0 = f(x_0) \qquad \Delta y = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \ \Delta x}$$

$t_0 = f(T_0)$ $\qquad$ $t_0 = f(T_0) = 4{,}6\ \mathrm{s}/10$ =0,46 s

$\Delta t = \left| \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}T}\right|_{T_0} \right| * \Delta T$ $\qquad$ = $\frac{1}{10} * 0{,}1\ \mathrm{s} = 0{,}01\ \mathrm{s}$

$$\boxed{t = (t_0 \pm \Delta t) = (0{,}46\ \pm 0{,}01)\ \mathrm{s}}$$

Y si quería medir t en forma directa con el mismo instrumento???

Propagación de errores: muchas variables

$$\boxed{y = f(p, q, r \ldots) \qquad y_0? \quad \Delta y?}$$

Cuando hay mas de una variable independiente, se deriva respecto de cada una de las variables, considerando a las otras como constantes (concepto de **derivada parcial**)

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}}$$

Fórmula de propagación de errores

HIPÓTESIS:

- p, q, r son variables medidas en forma directa.
- p, q, r son independientes.

Propagación de errores: muchas variables

Observación: recuperamos el resultado de 1 variable.

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \cancel{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2} + \cancel{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2} + \cancel{\cdots}}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2} = \left|\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0}\right| \Delta p$$

Intervalo

Suma y resta

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}$$

$$y = p + q \qquad \boldsymbol{y_0 = p_0 + q_0} \qquad \Delta y = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$$

$$y = p - q \qquad \boldsymbol{y_0 = p_0 - q_0} \qquad \Delta y = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$$

Entonces, para **suma** y **resta**:

$$y = p \pm q \qquad \boldsymbol{y = P_0 \pm q_0} \qquad \Delta y = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$$

Ejemplo: masa de una solución

Supongamos que tenemos una balanza analítica y vamos **tarando** y **agregando reactivos**. ¿Cómo se **propagan los errores** a los fines de saber la masa de la solución final?

Reactivo A	23,2 mg
Reactivo B	10,0 mg
Reactivo C	50,9 mg
Reactivo D	122,1 mg

Error de apreciación: 0,1 mg

Masa de la solución:

M = A + B + C + D = 206,2 mg

$$\Delta M = \sqrt{(\Delta\, A)^2 + (\Delta\, B)^2 + (\Delta\, C)^2 + (\Delta\, D)^2}$$

$$\Delta M = \sqrt{(0{,}1)^2 + (0{,}1)^2 + (0{,}1)^2 + (0{,}1)^2}\ \text{mg}$$

$$\Delta M = \sqrt{4.\,(0{,}1)^2}\ \text{mg} \qquad \rightarrow\ \Delta M = 0{,}2\ \text{mg}$$

M = (206,2 ± 0,2) mg

Si, en cambio, hago 1 medición directa de todo:

M = (206,2 ± 0,1) mg

¿Puedo **incrementar la precisión** en la determinación del valor representativo de algo que era del orden del error de apreciación del instrumento? En esos casos, ¿**la información que se obtiene es la misma**?

Disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo, 0,1s y el valor representativo es ≈ 0,5 s?

Medía el tiempo de 10 veces.
Obtengo, por ejemplo:

$$T = (4{,}6 \pm 0{,}1)\text{s}$$

$$\boxed{t = (0{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{s}}$$

$$\boxed{t = (0{,}46 \pm 0{,}01)\ \text{s}}$$

¿Cómo puedo hacer para determinar el peso de 1 hoja de papel de una resma, cuyo peso mas probable es de 0,01 g, con una balanza cuya resolución es 0,1 g?

¿Puedo?

¿Estoy determinando el peso de "esa" hoja?

¿O un peso promedio que tienen las hojas de esa resma?

Propagación de errores: productos

$$\boxed{y = p \cdot q}$$

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\bigg|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\bigg|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}}$$

$$y_0 = p_0 \cdot q_0$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\sqrt{\left(q\big|_{q_0} \Delta p\right)^2 + \left(p\big|_{p_0} \Delta q\right)^2}}{P_0 \cdot q_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{{q_0}^2} + \frac{(\Delta p)^2}{{p_0}^2}}} \Rightarrow$$

¡Uso errores relativos!

$$\varepsilon_y^2 = \varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2$$

Propagación de errores: cocientes

$$\boxed{y = \frac{p}{q}}$$

$$y_0 = \frac{p_0}{q_0}$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{q_o{}^2} + \frac{p_o{}^2 . (\Delta q)^2}{q_o{}^4}}}{P_0 \;/\; q_0}$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\left(\frac{(\Delta p)^2}{q_o{}^2} + \frac{p_o{}^2 . (\Delta q)^2}{q_o{}^4}\right)\frac{q_0{}^2}{P_0{}^2}} = \sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{P_o{}^2} + \frac{(\Delta q)^2}{q_o{}^2}}$$

¡También uso errores relativos!

$$\varepsilon_y^2 = \varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2$$

Resumen

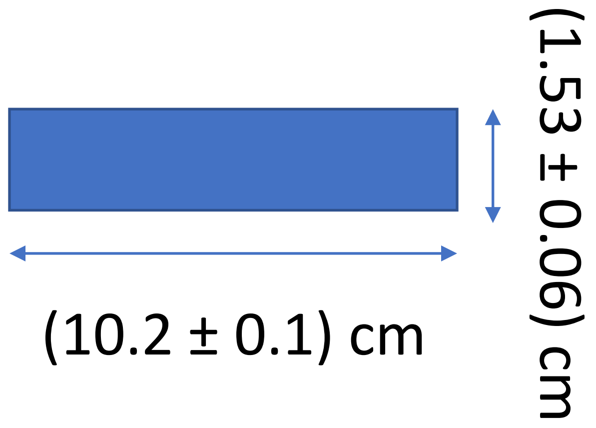
$$y = p \pm q \qquad \Delta y = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{p}{q} \\[2em] y = p \cdot q \end{array}\right\} \quad \frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{{q_0}^2} + \frac{(\Delta p)^2}{{p_0}^2}}$$

O en términos de errores relativos:

$$\epsilon_y = \sqrt{{\epsilon_p}^2 + {\epsilon_q}^2}$$

Ejemplo: área del rectángulo



$$z_o = L_1 \,.\, L_2$$

$$z_o = 1.53 \times 10.2 = 15.606\ \text{cm}^2$$

El error relativo del área $\Delta z/z$

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \sqrt{\frac{(\Delta L_1)^2}{{L_1}^2} + \frac{(\Delta L_2)^2}{{L_2}^2}}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{0.06}{1.53}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{10.2}\right)^2} = 0.0404422504$$

$$\Delta z = (1.53 \cdot 10.2) \cdot 0.0404422504 = 0.63083\ \text{cm}^2$$

$$\boxed{\text{Área: } z = (15{,}61 \pm 0{,}63)\ \text{cm}^2}$$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

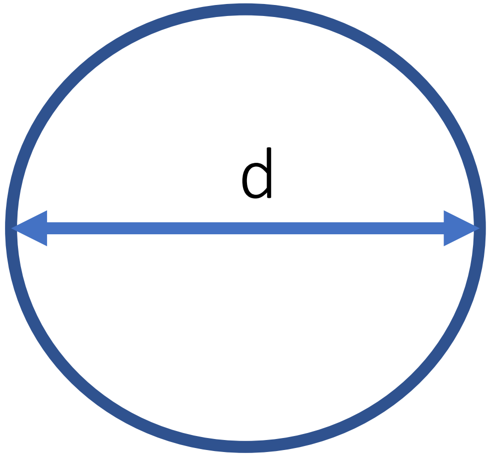
Cálculos con constantes irracionales

Se puede despreciar la influencia de su incerteza en el resultado, **eligiendo un número adecuado de cifras**

Un criterio es despreciarlo si su ε << que el de las otras MF intervinientes.

$$\varepsilon_\pi \ll \varepsilon_{MF} \qquad \varepsilon_\pi \leq 0{,}1.\,\varepsilon_{MF}$$

Ejemplo: ¿Con cuántas cifras se expresará π para despreciar su error en el cálculo de la longitud de una circunferencia?



L = π.d

$$\epsilon_L^2 = \cancel{\epsilon_\pi{}^2} + \epsilon_d{}^2$$

$$\varepsilon_\pi \ll \varepsilon_{(d)}$$

Sup. d = (10 +- 1) cm → ed = 10%

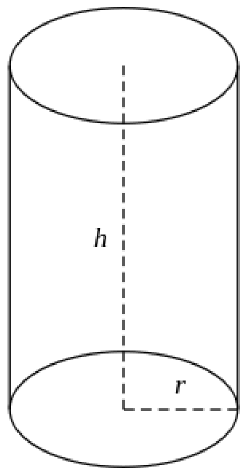
Pongo π = 3.14 (3,14 +- 0,005)

$$\varepsilon_\pi = \frac{0{,}01}{3{,}14} = 0.16\%$$

El caso de variables dependientes

V = ¼ π.d².h

$$\epsilon_V^2 = \cancel{\epsilon_\pi}^2 + \underbrace{(2\epsilon_d)^2} + {\epsilon_h}^2$$



OJO: d y d en d² son variables DEPENDIENTES pero lo puedo pensar como d² = A y ahí aplicar la regla:

V = ¼ π.d².h = ¼ π.A.h

$$\epsilon_V^2 = {\epsilon_A}^2 + {\epsilon_h}^2$$

$$\epsilon_A^2 = {\epsilon_{d^2}}^2 = \left(\frac{\Delta(d^2)}{d^2}\right)^2 = \left(\frac{2\mathrm{d}\Delta d}{d^2}\right)^2 = (2\epsilon_d)^2$$

$$\Delta(d^2) = 2d\Delta d$$

Por lo tanto, no puedo aplicar la regla y debo derivar cuando hay variables dependientes.

Caso más general

$$f = a^l b^m \ldots c^n$$

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{l^2 \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \ldots + n^2 \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2}$$

donde l, m y n son constantes que pueden ser negativas.

El péndulo: cálculo de g

Supongamos que queremos calcular g a partir de la determinación del período del péndulo (P)

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad\qquad g = 4\pi^2\frac{l}{P^2}$$

¿Cuál es el error absoluto de g??? Determinado en forma indirecta a partir de P y considerando despreciable $\varepsilon(\pi)$:

$$\Delta g = \sqrt{\left(4\pi^2\frac{1}{P^2}\Delta l\right)^2 + \left(4\pi^2\frac{-2}{P^3}\Delta P\right)^2} = 4\pi^2\frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(4\pi^2 \frac{1}{P^2}\Delta l\right)^2 + \left(4\pi^2 \frac{-2}{P^3}\Delta P\right)^2} = 4\pi^2 \frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{P^2}$$

$$\triangle g = g.\varepsilon(g)$$

$(\varepsilon\,(g))^2 = (2.\varepsilon\,(\pi))^2 + (\varepsilon\,(l))^2 + (2.\varepsilon\,(p))^2$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

$$\triangle g = g.\varepsilon(g)$$

$$\Delta g = 4\pi^2 \frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

Cálculo de volumen por distintos métodos

Objetivo de esta semana: calcular el **volumen** de dos piezas de **3 formas distintas**. Requisitos de la pieza:

1. Geometría conocida que permita estimar el volumen a partir de medir no más de 3 o 4 dimensiones.
2. Material conocido a modo de poder estimar su volumen usando la densidad y su peso.
3. Sumergible en agua para medir el volumen por desplazamiento de líquido.

Se necesitará un vaso medidor o recipiente graduado.

Alternativa: si no se cumplen los 3 requisitos, pueden trabajar con 2 o 3 piezas que cumplan al menos dos de los tres requisitos.

Cálculo de volúmenes

Ejemplos:

- Cilindro de metal
- Buje cilíndrico (cilindro metálico hueco)
- Vaso de vidrio recto
- Bolón de metal
- Pelota de pool