universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Verano 2021

Física 1 (Q) Laboratorio

Fuerzas Elásticas

Por Nicolás Torasso

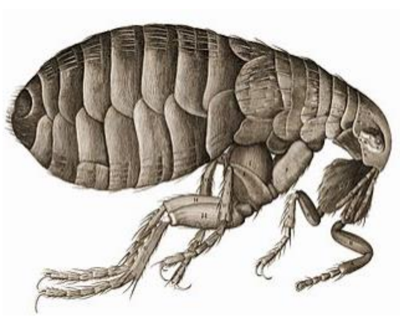
Cátedra Lozano

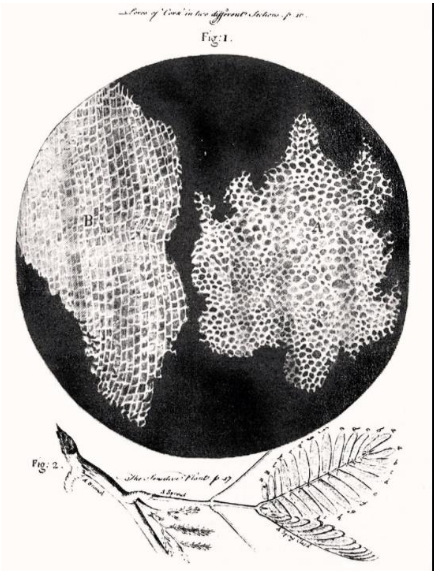
Temas

- Fuerza elástica
- Potencial y oscilación alrededor de la posición de equilibrio
- El resorte y sus características
- Frecuencia de oscilación
- Método estático (equilibrio)
- Método dinámico (oscilación)
- Ajustes no lineales

En ~1660 …

“ceiiinosssttuv”





Themed Issue Paper

The lost portrait of Robert Hooke?

LAWRENCE R. GRIFFING

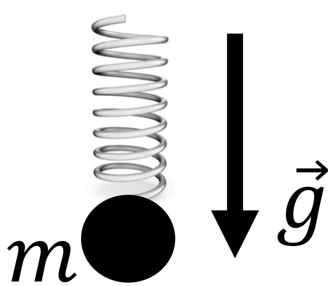
First published: 09 September 2019 | https://doi.org/10.1111/jmi.12828 | Citations: 1

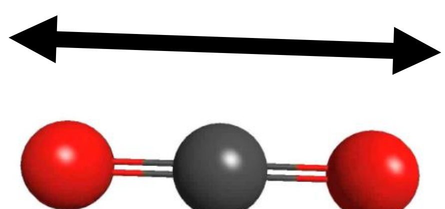
La fuerza elástica

"Ut tensio, sic vis"

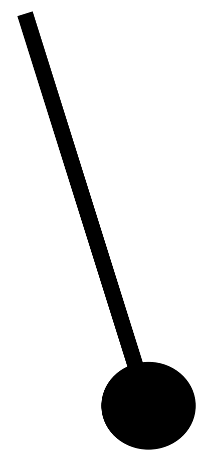
- Proporcional al desplazamiento
- Es restitutiva
- Ejemplos:

$$\vec{F} = -k\,\Delta\,\vec{x} \qquad [k] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$





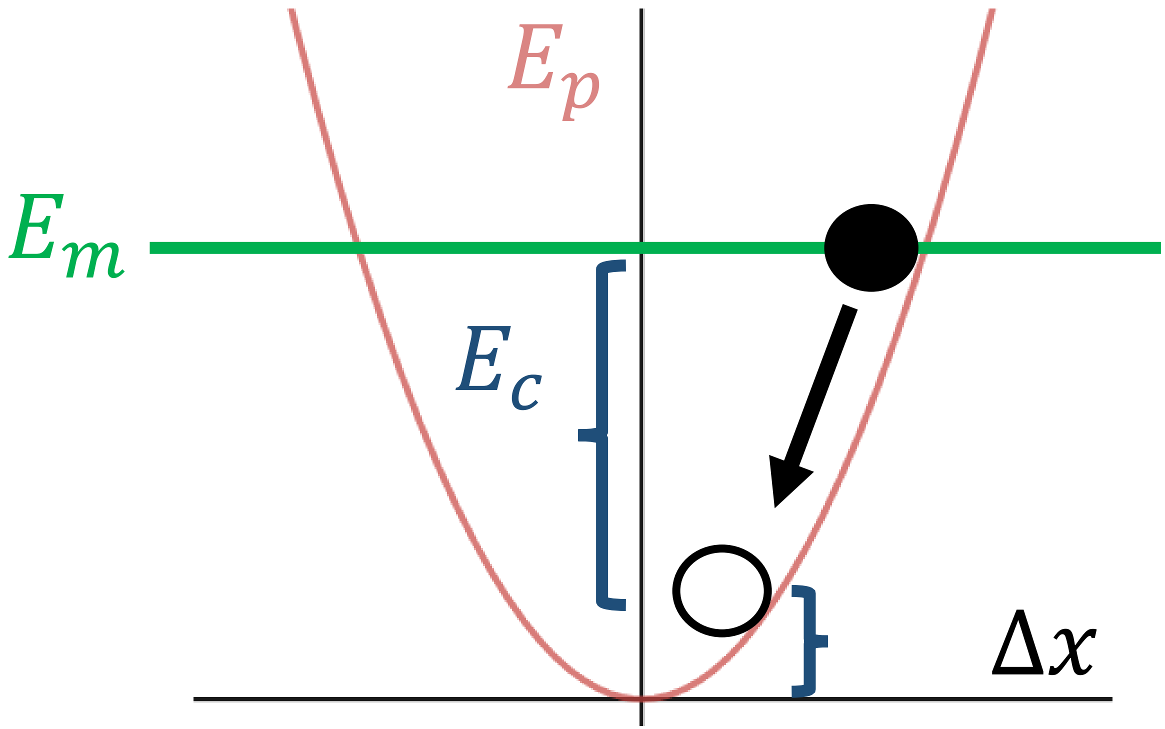
(CO_2)



El potencial elástico

$$E_p = \frac{1}{2} k \, (\Delta \, x)^2$$

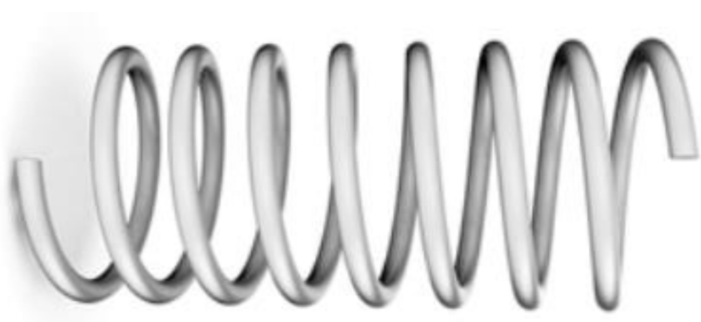
$$(\, E_p = -\int \vec{F}_{el} \, . \, d\vec{x} \,)$$



El resorte: ley de Hooke

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\Delta\,\vec{x}}$$

l_0: longitud natural



k: constante elástica

Δx

Elongación o compresión

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

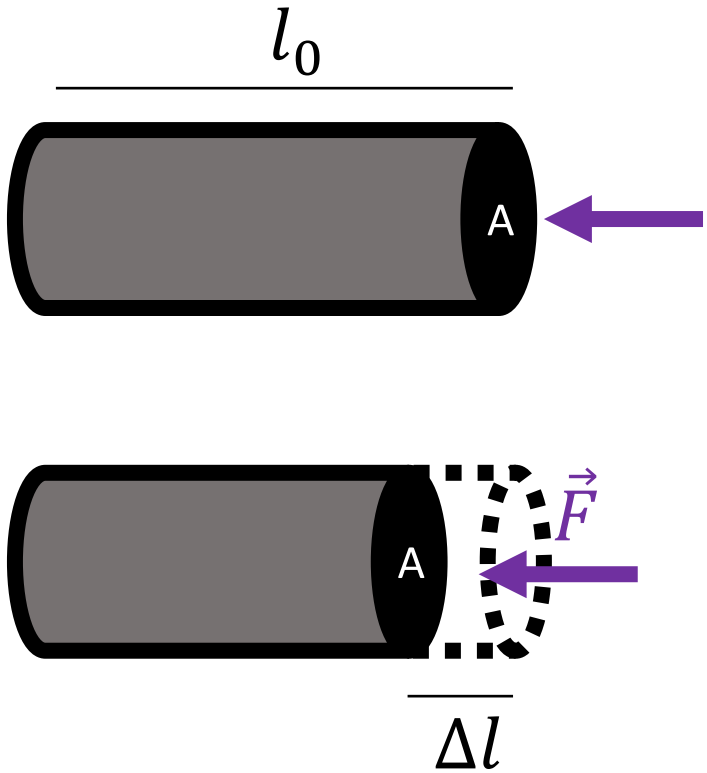
Un momento…

¿¿ los sólidos no puntuales también ??

- Deformar sólidos también tiene una respuesta elástica → generalización de la Ley de Hooke

Un momento…

¿¿ los sólidos no puntuales también ??

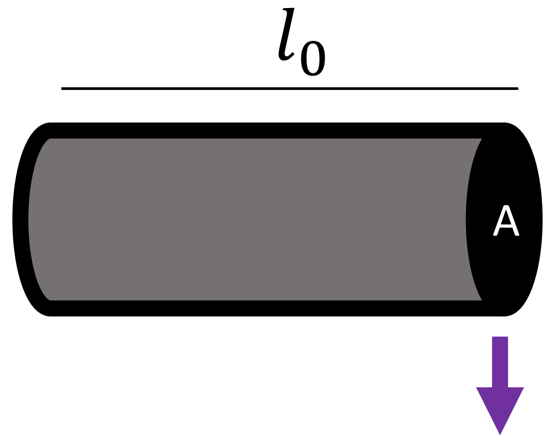


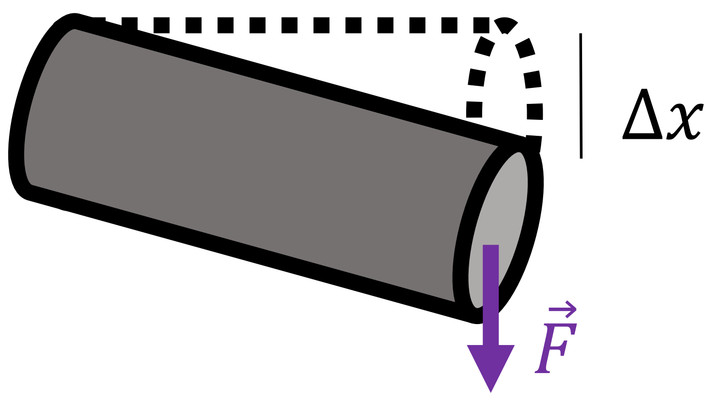
$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta l}{l_0}$$

"E: Módulo de Young"

Un momento…

¿¿ los sólidos no puntuales también ??





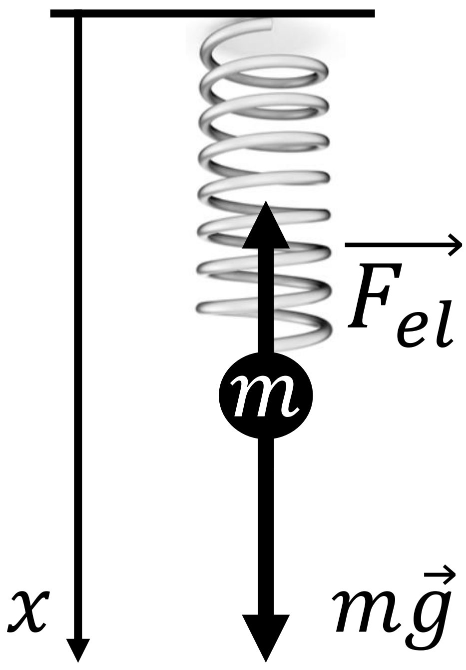
$$\frac{F}{A} = G\,\frac{\Delta x}{l_0}$$

"G: Módulo de corte"

Determinación de k

En $\hat{x}$:

$$F_{\mathrm{el}} = -k\,(x - l_0)$$
$$F_g = mg$$



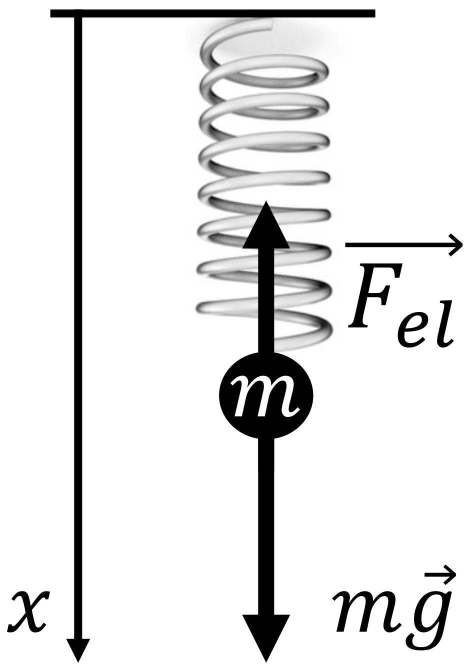
$$F_g + F_{el} = ma$$

Determinación de k: Método estático

Equilibrio: $\boldsymbol{a = 0}$

En $\hat{x}$: $$F_g + F_{el} = ma = 0$$

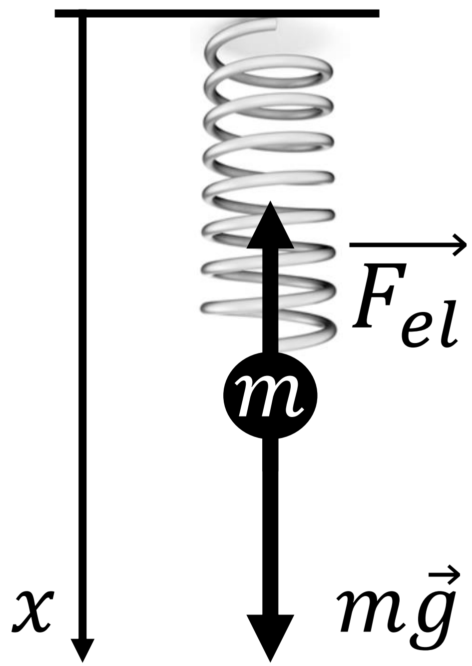
$$mg - k(x - l_0) = 0$$

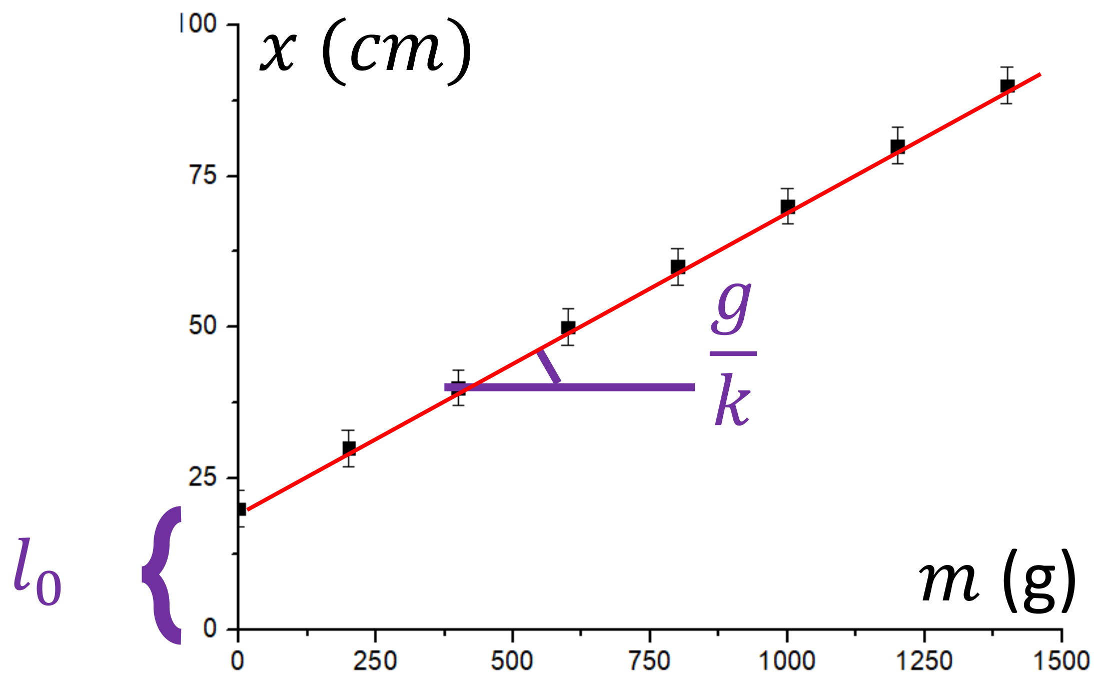


$$\boxed{x(m) = \frac{g}{k}m + l_0}$$

Determinación de k: Método estático

$$\boxed{x(m) = \frac{g}{k} m + l_0}$$





Determinación de k: Método dinámico

No equilibrio: $\boldsymbol{a \neq 0}$

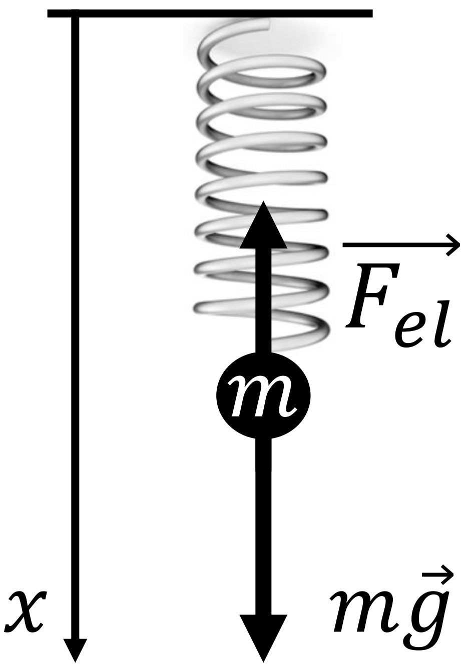
En $\hat{x}$:

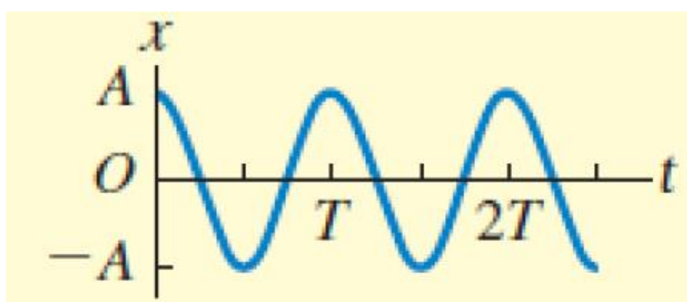
$$F_g + F_{el} = ma$$

$$mg - k(x - l_0) = m\ddot{x}$$

(... cuentas) Oscilación

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$





$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$T = 2\pi/\omega$$

Determinación de k: Método dinámico

Si medimos la aceleración, tiene la misma frecuencia:

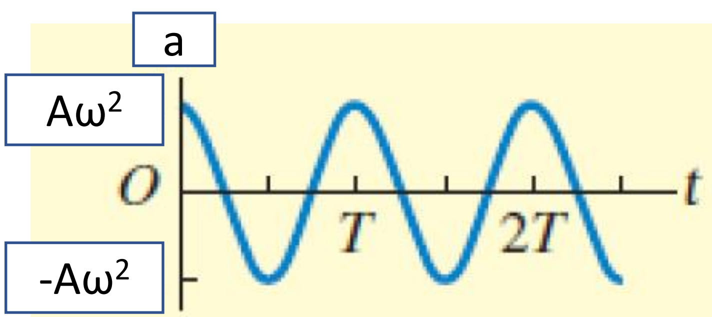
Posición $$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ Oscilación

↓ Derivo respecto de t

Velocidad $$v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

↓ Derivo respecto de t

Aceleración $$\boxed{a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)}$$



$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$T = 2\pi/\omega$$

Determinación de k: Método dinámico

$$T(m) = 2\pi\sqrt{m/k}$$

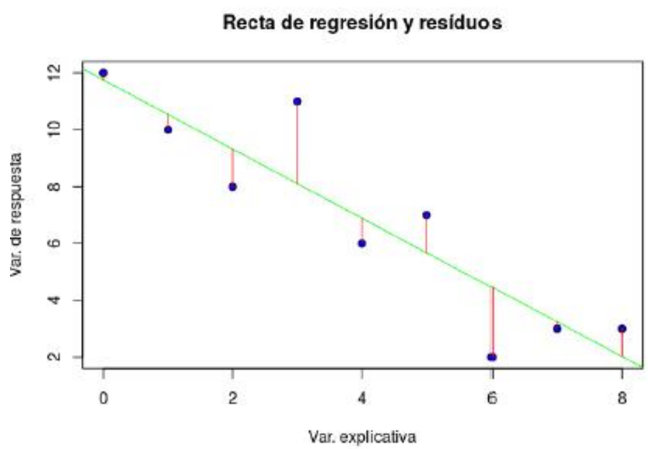
1. Mido T para varias masas.
2. Linealizo
3. Ajusto y despejo k

Ajuste lineal
vs
Ajuste no lineal

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Ajuste lineal

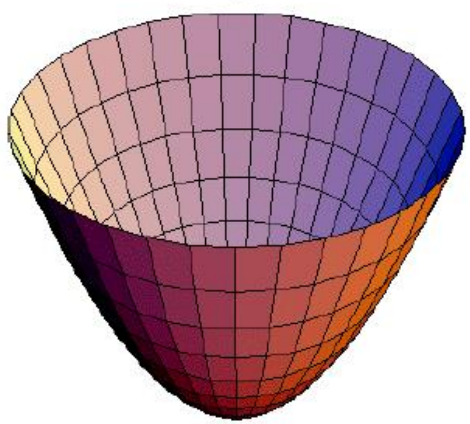
Minimizamos S^2

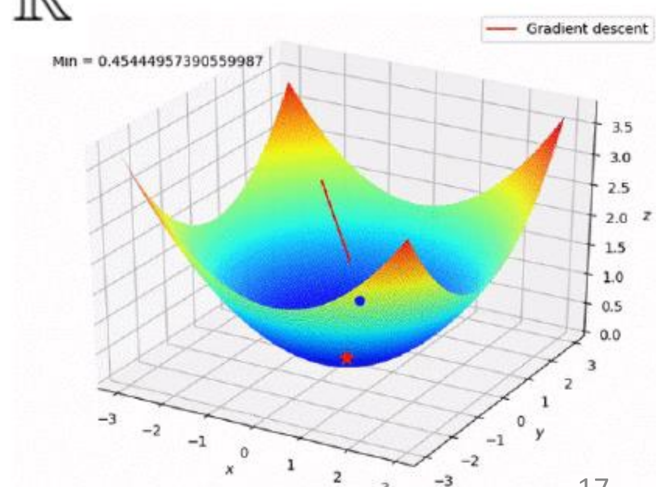


$$S^2 = \sum_i^N {\delta_i}^2 = \sum_i^N [y_i - f(x_i)]^2$$

$$S^2 = \sum_i^N [y_i - (a.x_i + b)\,]^2$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$





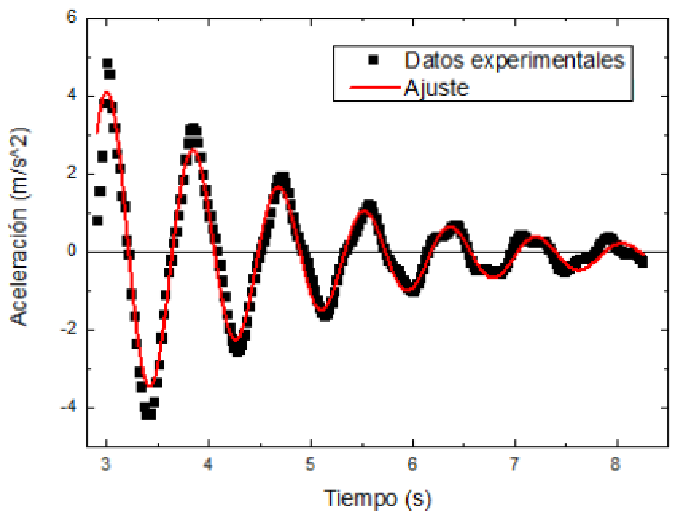
- a, b parámetros libres
- Un único mínimo
- Existe una solución analítica (derivando e igualando a 0)

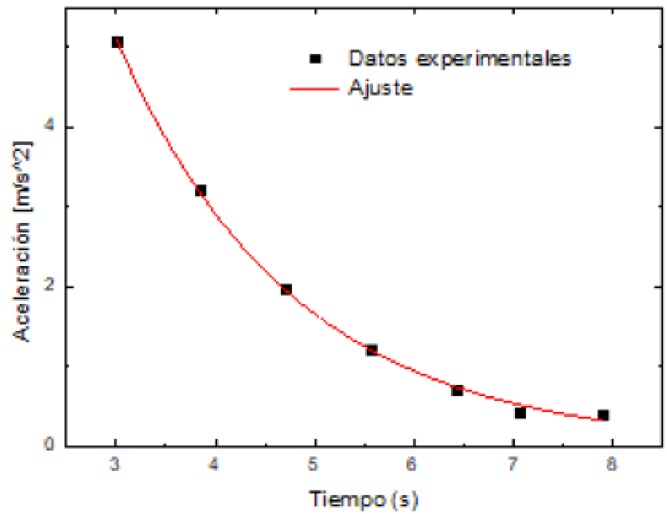
Ajuste NO lineal

También minimizamos S^2

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

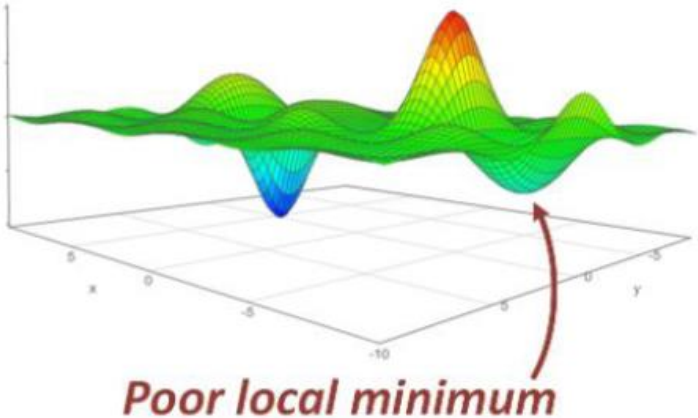
$$S^2 = \sum_i^N [y_i - f(x_i)]^2$$

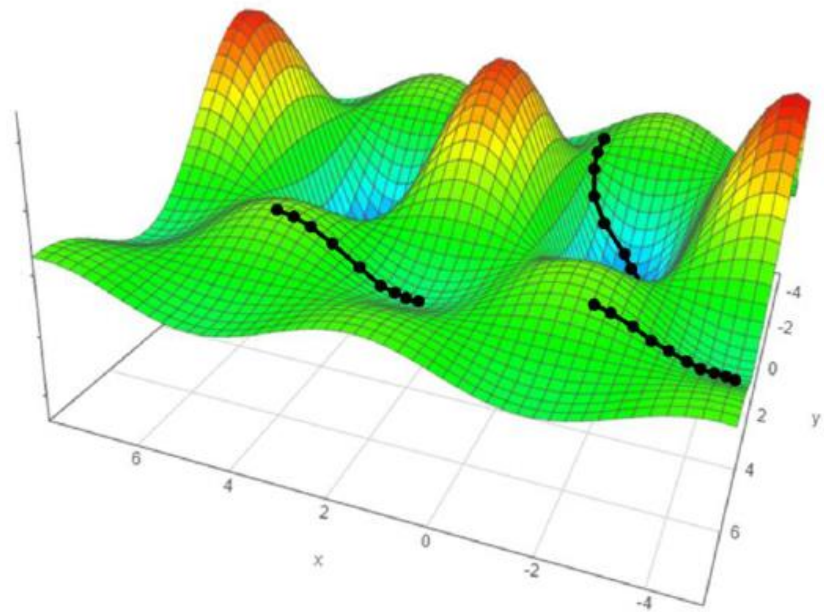




- Muchos parámetros
- Muchos mínimos locales
- No hay solución analítica, hay que resolver numéricamente
- Sensible a valores iniciales de los parámetros de ajuste

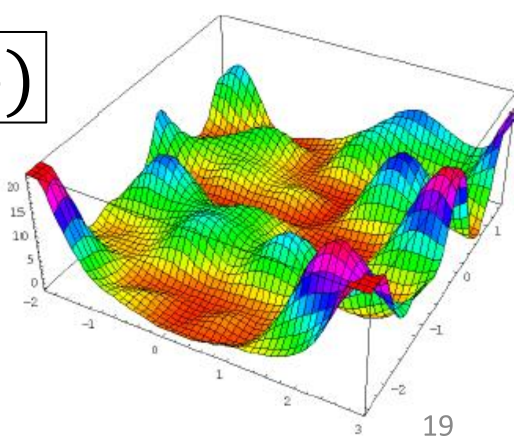
Ajuste NO lineal





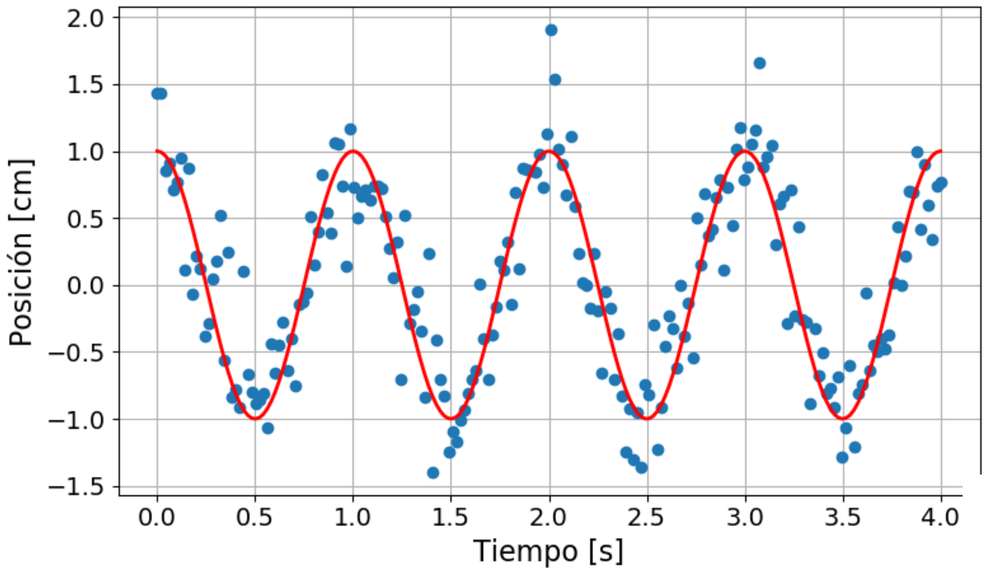
$$S^2 = \sum_{i}^{N} [y_i - f(x_i)]^2$$

Ej.: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$



- Muchos parámetros
- Muchos mínimos locales
- No hay solución analítica, hay que resolver numéricamente
- Sensible a valores iniciales de los parámetros de ajuste

Ajuste NO lineal: ejemplo

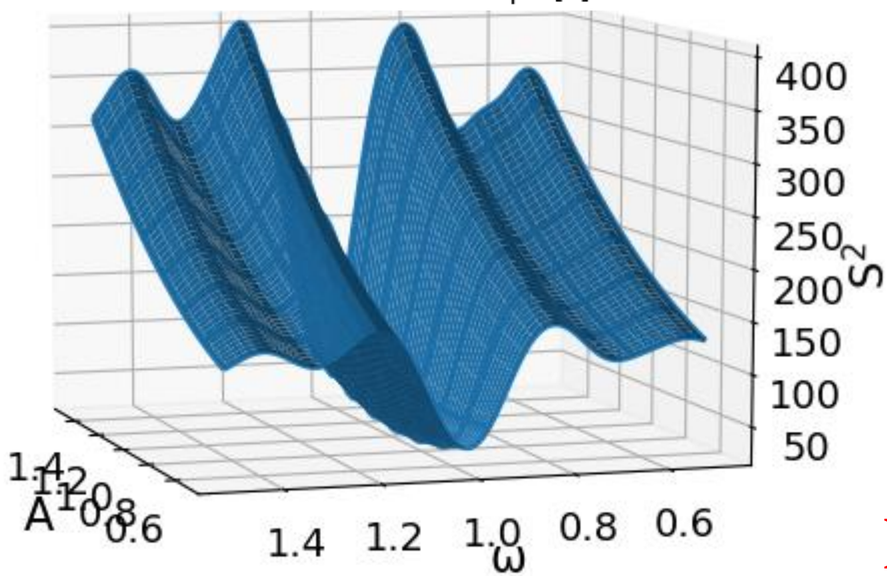


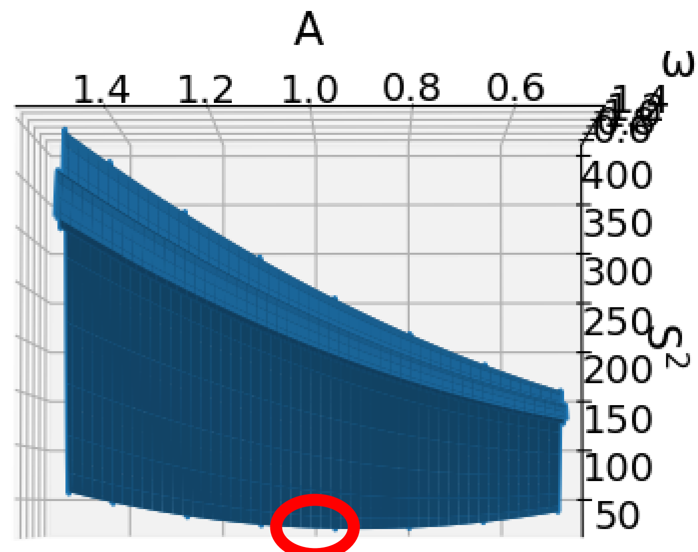
Datos experimentales:

$$\boxed{x(t) = \cos(t) + e_i}$$

Curva de ajuste:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t)}$$





Mínimo global A = 1, ω=1

Ajuste NO lineal: consideraciones

1. **Estimar los parámetros iniciales**
   cuanto más cerca estén de los valores óptimos, mejor va a ser la convergencia del algoritmo.
2. **Fijar límites para los parámetros**
   para obtener mejores resultados, fijar límites permite evitar regiones de parámetros que no sean útiles (por ejemplo frecuencias y amplitudes negativas)
3. **Graficar**
   un gráfico es fundamental para evaluar si el algoritmo convergió a algo razonable.

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Agradecimientos

- Agradecemos las diapositivas compartidas por la Dra. Laura Ribba, Santiago Estévez Areco y docentes de Física 1 (Q) 1c 2020