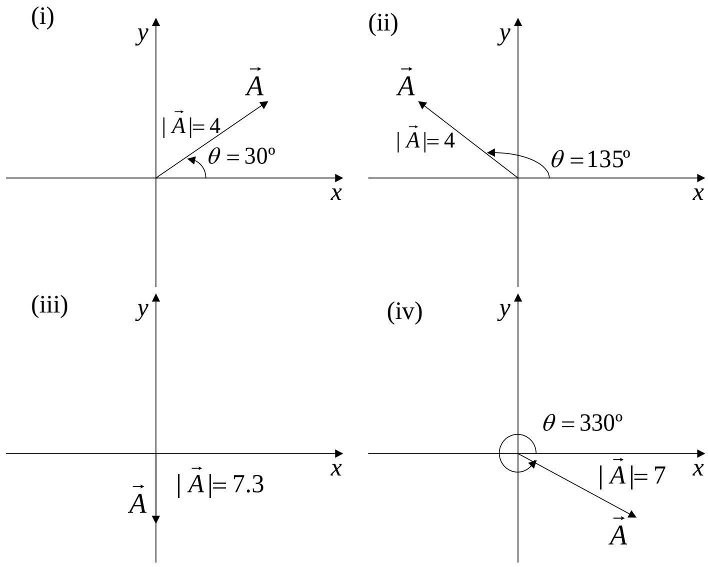
Guía 0. Repaso matemático

1) Hallar el módulo del vector de origen en $(20, -5, 8)$ y extremo en $(-4, -3, 2)$.

2) *a)* Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



b) Hallar el módulo y dirección de los siguientes vectores y representarlos gráficamente:

i) $\vec{A} = (3,3)$;
ii) $\vec{B} = (-1.25, -2.16)$;
iii) $\vec{C} = (-2.5, 4.33)$;
iv) $\vec{D} = (5,0)$
v) $\vec{E} = (0,3)$

3) Analice las propiedades de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ y $|\vec{A}| + |\vec{B}| = |\vec{C}|$

b) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$

c) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ y $A^2 + B^2 = C^2$

4) Usando la definición de producto escalar, calcular

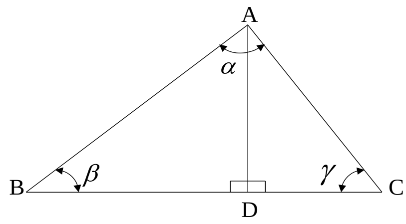
a) $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}$
b) $\hat{\imath} \cdot \hat{k}$
c) $\hat{\jmath} \cdot \hat{k}$
d) $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}$
e) $\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}$
f) $\hat{k} \cdot \hat{k}$

donde $\hat{\imath} = (1,0,0)$, $\hat{\jmath} = (0,1,0)$, $\hat{k} = (0,0,1)$.

5) Haciendo uso de la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma, es decir, $\vec{C} \cdot (\vec{E} + \vec{F}) = \vec{C} \cdot \vec{E} + \vec{C} \cdot \vec{F}$ y de los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, demostrar que si:

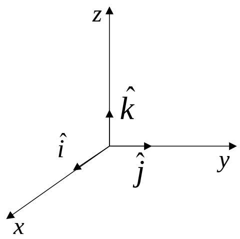
$\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ y $\vec{B} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$ entonces: $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

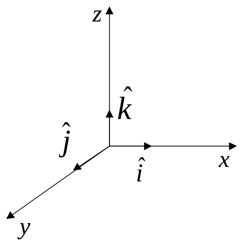
6) *a)* Utilizando el teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas, demostrar en el triángulo de la figura el "Teorema del Coseno": $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB\,BC\cos\beta$, donde AB, BC y AC son las longitudes de los respectivos lados.
(Ayuda: Considerar los triángulos rectángulos ABD y ADC.)



b) Utilizando la definición del seno demostrar sobre los mismos triángulos que: $AC/\text{sen}\beta = AB/\text{sen}\gamma$, y generalizar el resultado para demostrar el "Teorema del Seno": $AC/\text{sen}\beta = AB/\text{sen}\gamma = BC/\text{sen}\alpha$.

7) *a)* Sean $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ los versores de la terna mostrada en la figura de la izquierda. Usando la definición de producto vectorial, calcular





a) $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$ *d)* $\hat{\imath} \times \hat{\imath}$
b) $\hat{k} \times \hat{\imath}$ *e)* $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}$
c) $\hat{\jmath} \times \hat{k}$ *f)* $\hat{k} \times \hat{k}$

b) Repetir el cálculo anterior para la terna de la figura de la derecha y comparar con los resultados obtenidos en ambos casos. *(Nota: En lo sucesivo se convendrá en trabajar con ternas derechas (caso (a)), en las cuales $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$.)*

8) Hallar la expresión de los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares y cilíndricas. Representar gráficamente.

Derivadas e Integrales

9) Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Derivar las siguientes funciones:

a) $f(t) = c$
b) $f(t) = b\,t + c$
c) $f(t) = b\,t^{-1} + c$
d) $f(t) = b\,t^n$, con $n \neq 1$
e) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$
f) $f(t) = A\sin(\omega\,t + \phi)$
g) $f(t) = A\cos(\omega\,t + \phi)$
h) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\cos(\omega\,t + \phi)$

10) La función primitiva $F(t) = \int f(t)\,dt$, es tal que su derivada es $f(t)$. Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Hallar la primitiva de $F(t)$ de las siguientes funciones. No olvidar las constantes de integración.

a) $f(t) = c$
b) $f(t) = b\,t + c$
c) $f(t) = b\,t^{-1} + c$
d) $f(t) = b\,t^n$, con $n \neq 1$
e) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$
f) $f(t) = A\sin(\omega\,t + \phi)$
g) $f(t) = A\cos(\omega\,t + \phi)$
h) $f(t) = \frac{2\,t}{(t^2+1)^n}$ [integración por sustitución]
i) $f(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$ [integración por partes]

11) Utilizando la regla de Barrow —$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, con F una primitiva de f— calcular las siguientes integrales:

a) $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$ (con a constante)
b) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ (con $v(t)$ del ítem anterior)
c) $E_p(h) = \int_0^h mg\,dx$ (mg constante [fuerza gravitatoria])