Laboratorio de física 1
2do cuatri 2023

Mediciones indirectas

- Quiero medir una magnitud Z pero no tengo un instrumento para medirla de forma <u>directa</u>

- Conozco la relación funcional $Z = f\left(X, Y\right)$

- Puedo medir X e Y de forma directa $X = \overline{X} \pm \Delta X$ $\quad Y = \overline{Y} \pm \Delta Y$

→Puedo determinar Z de forma <u>indirecta</u> $\overline{Z} = f\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ **Pero, cómo estimar ΔZ?**

Ejemplos: área $A = b \cdot h$ velocidad $v = \dfrac{d}{t}$

Valor más probable $\overline{A} = \overline{b} \cdot \overline{h}$ $\quad \overline{v} = \dfrac{\overline{d}}{\overline{t}}$

Una forma de acotar el intervalo:

$$A_{\max} = \left(\overline{b} + \Delta b\right)\left(\overline{h} + \Delta h\right)$$

$$A_{\min} = \left(\overline{b} - \Delta b\right)\left(\overline{h} - \Delta h\right)$$

$$v_{\max} = \frac{\overline{d} + \Delta d}{\overline{t} - \Delta t} \qquad v_{\min} = \frac{\overline{d} - \Delta d}{\overline{t} + \Delta t}$$

Analicemos un caso con una sola variable: $Y = f\left(X\right)$

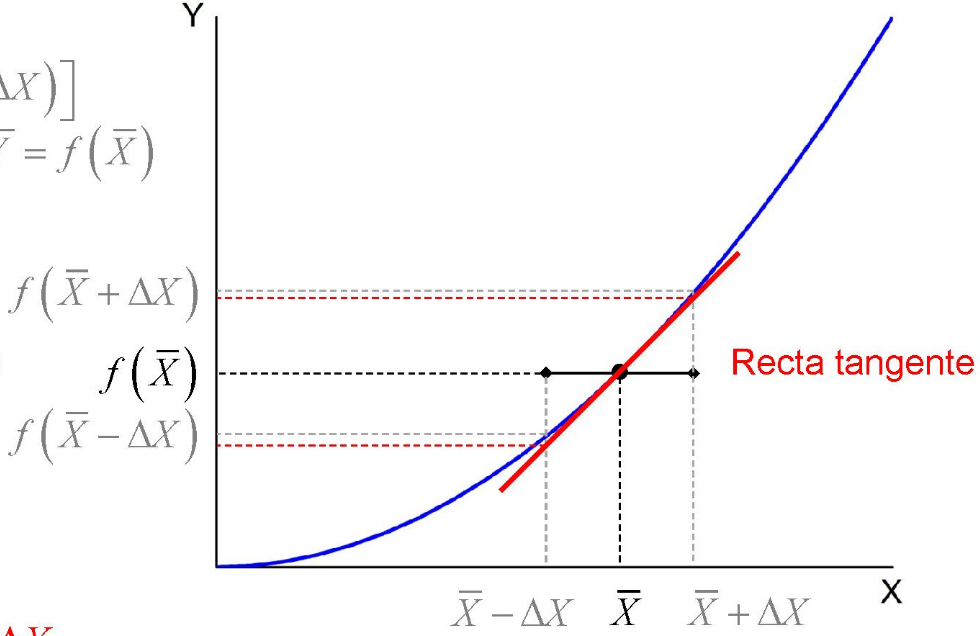
Por ejemplo, área de un cuadrado: $A = b^2$ $\quad Y = X^2$

El intervalo $\left[f\left(\bar{X}-\Delta X\right), f\left(\bar{X}+\Delta X\right)\right]$ no está centrado en $\bar{Y} = f\left(\bar{X}\right)$

$f\left(\bar{X}\right)+f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$

Taylor de primer orden

$f\left(\bar{X}\right)-f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$



$$\Downarrow$$

$$Y = f\left(\bar{X}\right) \pm f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$$

$$Y = \bar{Y} \pm \Delta Y$$

Para una variable:

$$Y = f\left(X\right) \longrightarrow \overline{Y} = f\left(\overline{X}\right) \qquad \Delta Y = \left|\frac{df}{dX}\right|_{\overline{X}} \Delta X$$

Para N variables (ejemplo con 2):

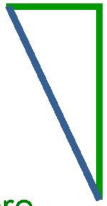
$$Z = f\left(X, Y\right) \longrightarrow \overline{Z} = f\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$$

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta X\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta Y\right)^2}$$

Fórmula de propagación de errores

Fórmula simplificada (aproximación)

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta X + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta Y$$



Sobreestima el error pero simplifica las cuentas

Propagación de errores - Ejemplos

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta X + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta Y$$

Suma

$$Z = X + Y \qquad \Delta Z = |1|\Delta X + |1|\Delta Y$$

Resta

$$Z = X - Y \qquad \Delta Z = |1|\Delta X + |-1|\Delta Y$$

$$\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$$

Multiplicación

$$Z = XY \qquad \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \frac{|\bar{Y}|\Delta X + |\bar{X}|\Delta Y}{\bar{X}\bar{Y}}$$

División

$$Z = \frac{X}{Y} \qquad \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \frac{\left|\frac{1}{\bar{Y}}\right|\Delta X + \left|-\frac{\bar{X}}{\bar{Y}^2}\right|\Delta Y}{\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}}$$

$$\frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \frac{\Delta X}{\bar{X}} + \frac{\Delta Y}{\bar{Y}}$$

$$\varepsilon_Z = \varepsilon_X + \varepsilon_Y$$

$$\Delta Z = \left(\frac{\Delta X}{\bar{X}} + \frac{\Delta Y}{\bar{Y}}\right)\bar{Z}$$

Propagación de errores: ejemplos

$$Z = X^2 Y \longrightarrow \Delta Z = \left(2\frac{\Delta X}{\overline{X}} + \frac{\Delta Y}{\overline{Y}} \right) \overline{Z}$$

$$W = \frac{kX^a Y^b}{Z^c} \longrightarrow \Delta W = \left(a\frac{\Delta X}{\overline{X}} + b\frac{\Delta Y}{\overline{Y}} + c\frac{\Delta Z}{\overline{Z}} \right) \overline{W}$$

En algunos casos habrá que plantear las derivadas parciales

$$\Delta Z = \left| \frac{\partial Z}{\partial X} \right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta X + \left| \frac{\partial Z}{\partial Y} \right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta Y$$

Ejemplo:

$$Z = X^2 \ln Y \longrightarrow \Delta Z = \left| 2\overline{X} \ln \overline{Y} \right| \Delta X + \left| \frac{\overline{X}^2}{\overline{Y}} \right| \Delta Y$$

$$\Delta Z = \left(2\frac{\Delta X}{\overline{X}} + \frac{\Delta Y}{\overline{Y} \ln \overline{Y}} \right) \overline{Z}$$

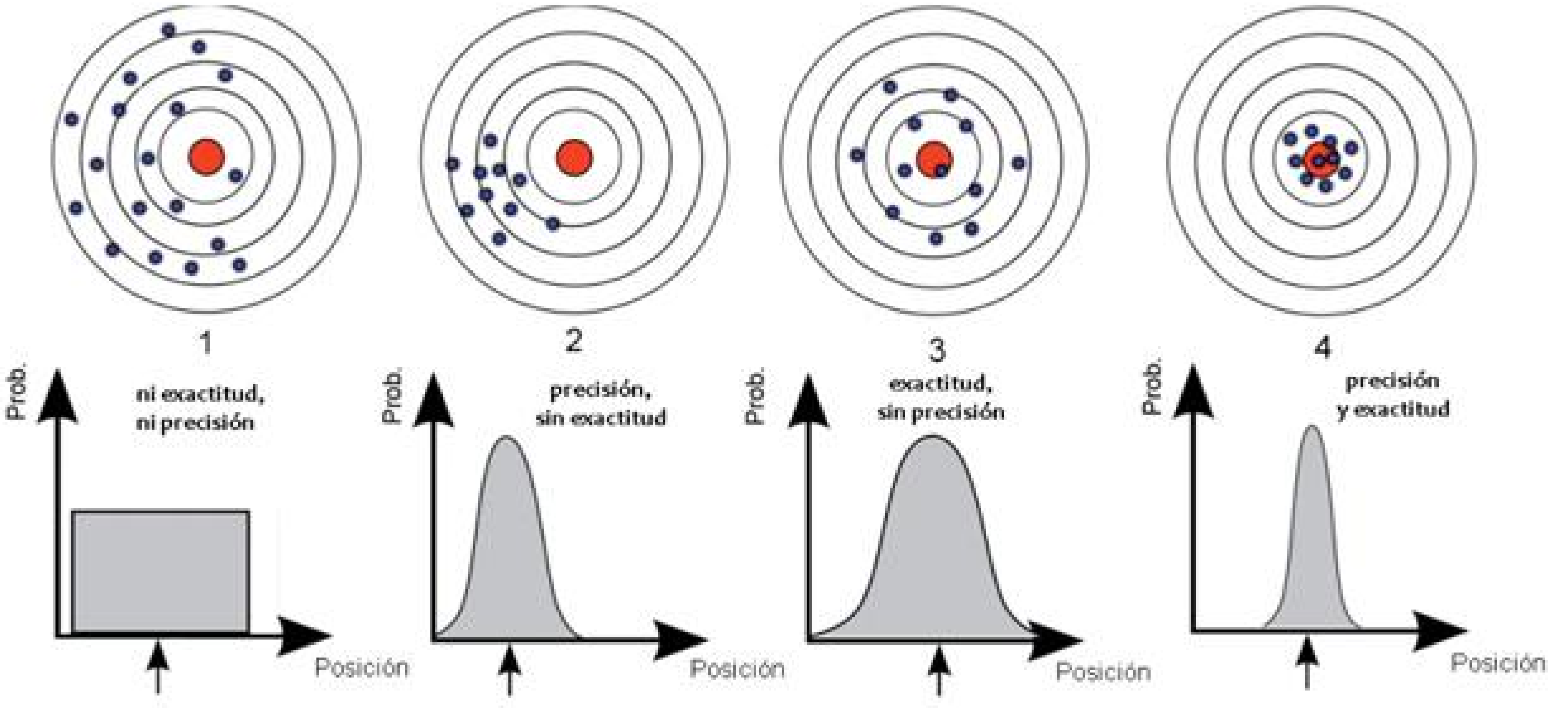
¿Precisión o exactitud?

Exactitud: Distancia entre el valor medido y el valor “Real”. Cuando tenemos un conjunto de mediciones de la misma cantidad física, la Exactitud es la distancia entre la media y el valor “Real”.

Precisión: Cercanía de los datos entre sí, independientemente de la exactitud.

Error Relativo= $Er(x) = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$

Error Porcentual es simplemente 100 · Er(x)



Emilio Prieto. Revista e-medida, ejemplar Febrero 2012

Incertezas

$\boldsymbol{\sigma^2_{total} = \sigma^2_{ap} + \sigma^2_{exac} + \sigma^2_{sist} + \sigma^2_{est}}$

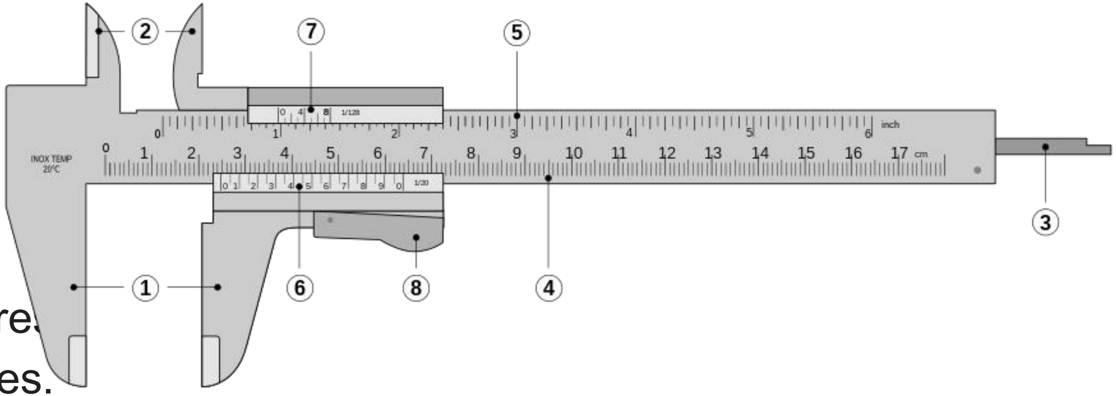
σ_{ap}= Mínima división del instrumento (apreciable por el observador)

σ_{exac}= Error absoluto con el que el instrumento fue calibrado

σ_{sist}= Se producen por las imperfecciones del método (reloj que atrasa, regla dilatada, etc)

σ_{est}= Son los que se producen al azar, descritos por la teoría de errores

Medición de longitud: calibre



1. Mordazas para medidas exteriores.
2. Mordazas para medidas interiores.
3. Sonda para medida de profundidades.
4. Escala con divisiones en centímetros y milímetros.
5. Escala con divisiones en pulgadas y fracciones de pulgada.
6. Nonio para la lectura de las fracciones de milímetros en que esté dividido.
7. Nonio para la lectura de las fracciones de pulgada en que esté dividido.
8. Botón de deslizamiento y freno.

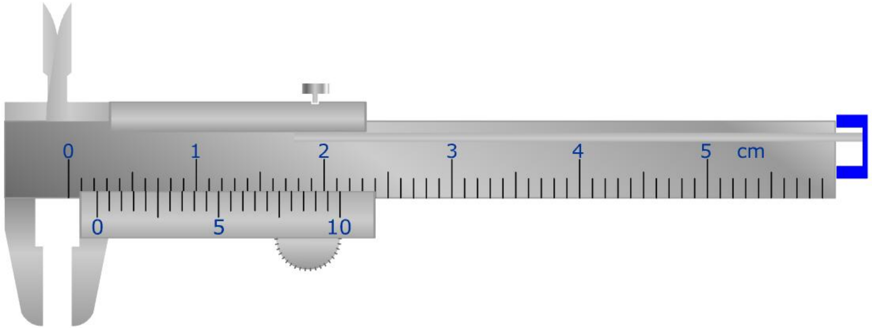
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Calibre_(instrumento)

Uso de calibre, paso a paso

1) Ajustan el calibre usando alguna de las tres opciones de medición (medida exterior, interior o profundidad).
2) Fijan con el botón de deslizamiento o freno
3) Se fijan cuál es la Rayita de la Regla Previa al “0” del Vernier o Nonio.
4) Vernier/Nonio: nos habilita a medir fracciones de la mínima unidad de la regla (en general, 1 mm), según la cantidad de subdivisiones o “rayitas”.
5) Cuentan la cantidad de Rayitas del Vernier/Nonio hasta la primera alineada con la regla. Esto lo multiplican por la mínima unidad del Vernier/Nonio.

El **resultado** lo obtienen de **sumar** lo que obtuvieron en el **paso 3** con el resultado obtenido en el **paso 5.** ¡¡Presten atención a las unidades!!

calibre: algunos ejemplos



(paso 4) divisiones del Vernier/Nonio: 20⇒1/20=0,05⇒cada rayita 0,05mm

medida total:

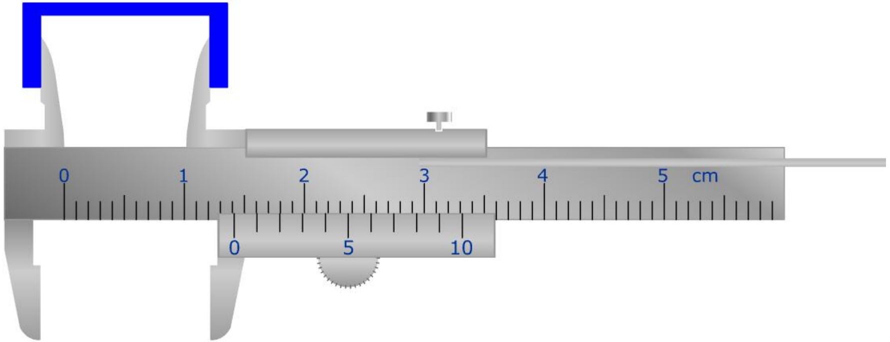
(paso 3): 2 mm

(paso 5): coincide en quinta rayita: 0.05mm*5=0,25mm

Resultado: (2,25±0,05)mm

Para usar interactivo: https://www.educaplus.org/game/calibre

calibre: algunos ejemplos



(paso 4) divisiones del Vernier/Nonio: 10⇒1/10=0,1⇒cada rayita 0,1mm

medida total:

(paso 3): 14 mm=1,4 cm

(paso 5): coincide en segunda rayita: 0.1mm*2=0,2mm

Resultado: (14,2±0,1)mm

Para usar interactivo: https://www.stefanelli.eng.br/es/calibre-virtual-simulador-milimetro-02/

https://www.educaplus.org/game/calibre

Objetivo de la clase de hoy

- Determinar el volumen de un cuerpo por tres métodos distintos

1) usando el volumen desplazado en una probeta
2) Midiendo con un calibre sus lados
3) Usar la relación entre masa, volumen y densidad

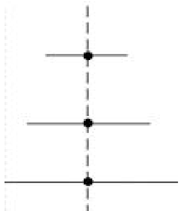
Antes de empezar:

- Pensar para cada método si es medición directa o indirecta y por qué
- Pensar que hipótesis se utilizan para cada una de las mediciones

Clase de hoy

Al finalizar:

- Anotar los resultados en una tabla comparativa
- Graficar cada valor con su intervalo de confianza y ver si se solapan. Por ejemplo:



- Comparar los tres resultados, estudiando precisión y exactitud de cada método