departamento de física
universidad de buenos aires - exactas
Juan José Giambiagi

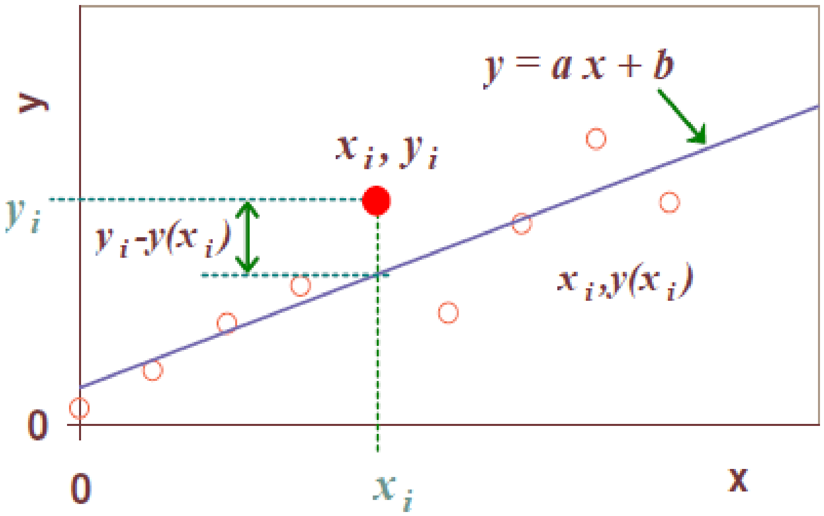
Clase 03:
1era parte: Péndulo. Medición de la constante gravitatoria, g. Ajuste por método de cuadrados mínimos.

Laboratorio de física 1 para químicos

1er cuatrimestre 2022

1) Explicación teórica:
Método de cuadrados mínimos y regresión lineal[1].

- Es importante que los datos medidos se puedan representar en un gráfico **adecuado**, donde queda resumida la información para analizar, sobretodo si entre las variables del experimento hay alguna correlación o relación funcional.
- El método de **cuadrados mínimos** permite obtener parámetros óptimos de una curva que ajustan un conjunto de datos (x_i, y_i).
- Cuando la relación entre las variables x e y es lineal, el método de ajuste por cuadrados mínimos se denomina también **método de regresión lineal**.



Representación gráfica de (xi,yi) con tendencia lineal.

-Los círculos representas valores medidos.

-La recta es la representación del **modelo** y(x)=ax+b

-La cantidad y_i-$y(x_i)$ es la desviación de cada observación de y_i respecto del valor predicho por el modelo $y(x_i)$.

[1] Física recreativa.

1) Explicación teórica:
Método de cuadrados mínimos y regresión lineal[1].

• Objetivo: encontrar la mejor recta que ajusta estos datos, o sea , los valores de *a* y *b*.

•Se define la función χ^2 (chi cuadrado):

$$\chi^2(a,b) = \sum_i [y_i - (ax_i + b)]^2$$

• χ^2 es una medida de la desviación total al cuadrado de los valores observados y_i respecto de los predichos por el modelo lineal $ax+b$.

• χ^2 es medida de la distancia (vertical) de todos los datos (x_i,y_i), a la recta.

•Para un dado conjunto de datos (x_i,y_i), el valor de χ^2 depende de los parámetros de la recta, *a* y *b*.

•El método de cuadrados mínimos supone que los valores de la pendiente *a* y la ordenada al origen *b*, que mejor ajustan los datos son aquellos que **minimizan** esta desviación total, o sea, que **minimizan** la función $\chi^2(a,b)$. El problema de minimización se reduce al de resolver el par de ecuaciones:

$$\frac{d\chi^2}{da} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\chi^2}{db} = 0$$

•Donde las incógnitas son *a* y *b*.

[1] Física recreativa.

1) Explicación teórica:
Método de cuadrados mínimos y regresión lineal[1].

• Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

• En general se utiliza la siguiente notación para reescribir *a* y *b*:

$$< x^k > \equiv \frac{\sum x_i^k}{N}, \quad < y^k > \equiv \frac{\sum y_i^k}{N} \quad \text{con } k = 0,1,2,\ldots \qquad < xy > \equiv \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N}$$

• De esta forma *a* y *b* quedan:

$$a = \frac{< xy > - < x >< y >}{< x^2 > - < x >^2} \qquad b = < y > - a < x >$$

• La recta obtenida con estos coeficientes se denomina **regresión lineal**.

•**Observación**: estas fórmulas están incorporadas en la mayoría de los programas de análisis de datos y se realiza usando la herramienta de “**ajuste lineal**”.

[1] Física recreativa.

1) Explicación teórica:
Método de cuadrados mínimos y regresión lineal[1].

departamento de física
universidad de buenos aires - exactas
Juan José Giambiagi

• **La bondad** o **calidad del ajuste** se analiza con el coeficiente de correlación R^2 entre las variables x e y, que adopta valores entre 0 y 1 y caracteriza la dispersión de los datos alrededor de la línea de cuadrados mínimos.

•El coeficiente de correlación se define como:

$$R^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - \sum [y_i - (ax_i + b)]^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - \chi^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

•R^2 es adimensional.

•Si los datos "caen" sobre la línea de regresión, hay correlación perfecta ($\chi^2 \sim 0$) y $R^2 \sim 1$, por lo que se dice que el modelo lineal es adecuado.

•De lo contrario, cuanto peor es el ajuste χ^2 será un valor "grande", casi próximo al 1er término y $R^2 \sim 0$.

•**Importante**: el método de regresión lineal considera que todos los datos de la variable dependiente y tienen la misma incerteza (sino se debe usar **método de cuadrados mínimos ponderados**) y que la incerteza de la variable independiente x es **despreciable**.

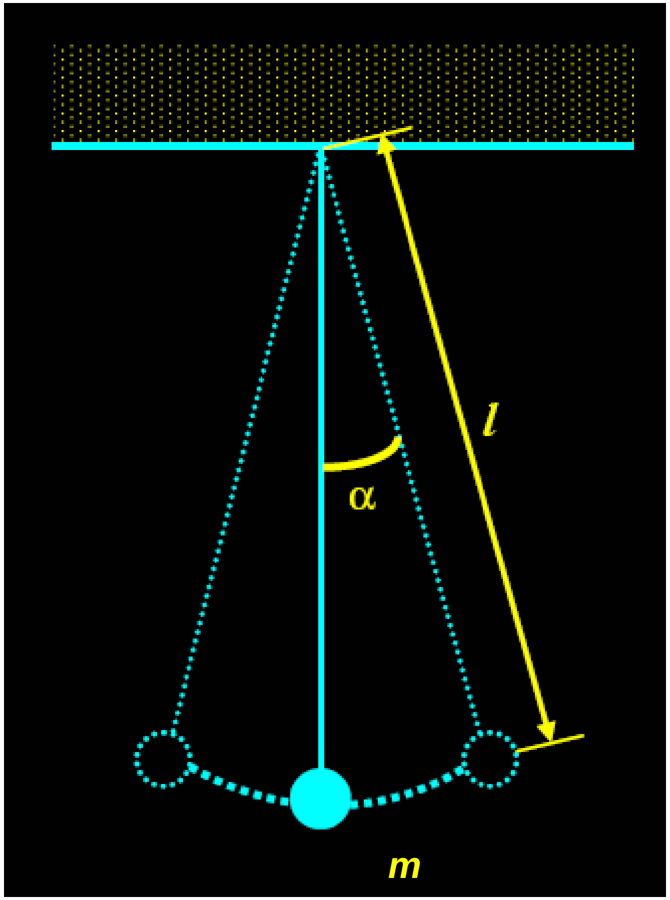
Solo considera errores en Y. Debemos comprobar: $\frac{\Delta x}{\bar{x}} \ll \frac{\Delta y}{\bar{y}}$

Si $\Delta x/_{\bar{x}} \gg \Delta y/_{\bar{y}}$ **debemos invertir los ejes y calcular** $f^{-1}(y)$

1) Explicación teórica: Péndulo

departamento de física
universidad de buenos aires - exactas
Juan José Giambiagi

•El **péndulo simple** (**péndulo ideal,** sistema idealizado para explicar teoría) está constituido por una partícula de masa ***m*** que está suspendida mediante un hilo inextensible ***l*** y sin peso.



-Ecuación de movimiento: $F_t = -mg\sin\theta = ma_t$

- Relación entre aceleración tangencial y angular: $a_t = \ell\ddot{\theta}$

- Ecuación diferencial del péndulo simple en el plano: $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

- Aproximación de pequeñas oscilaciones (¿qué valor de ángulos utilizo?)

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

[1] Clase de laboratorio de física 1 depto de Física-FCEyN-UBA.

1) Explicación teórica: Péndulo

•Reescribo la ecuación diferencial con la aproximación de pequeñas oscilaciones (sen θ ~ θ):

- Ecuación de movimiento armónico simple: $\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0$

- Solución: $\theta = \Theta \sin(\omega t + \phi)$

Con ω la frecuencia angular dada por: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ y el periodo: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

(Recordar: ω= 2π f y f = 1/T)

El período es el tiempo utilizado en realizar una oscilación completa y según la ecuación se puede decir que depende de la longitud del hilo y de la aceleración de la gravedad.

Importante ¿Cuáles son las hipótesis teóricas del experimento?:

-Masa puntual

-Hilo inextensible y sin peso.

-No rozamiento con el aire

[1] Clase de laboratorio de física 1 depto de Física-FCEyN-UBA.

2) Experimento

• Objetivos:

-Determinar el valor de la aceleración de la gravedad, *g*, usando un péndulo como método experimental y realizando un ajuste lineal con el método de cuadrados mínimos como método analítico.

-Analizar las hipótesis planteadas para el experimento y reportar la magnitud de g con su **respectiva incerteza**.

Actividad 1 (día 1): Determinación de g a partir de la medición del período de un péndulo.

a) Construir un péndulo simple, de forma tal que se pueda variar L.

Sugerencia: empezar con un valor mayor a 1,40 m y luego ir acortando el hilo.

b) Medir el período del péndulo *T* con una buena estadística (sugerencia: medir por ejemplo 10-12 oscilaciones y luego dividir ese valor de tiempo por la cantidad de oscilaciones).

Repetir la medida de *T* para 10 valores de *L* distintos, sin modificar los demás parámetros y chequeando que la oscilación sea pequeña. ¿Por qué no se hace una sola medida de T?

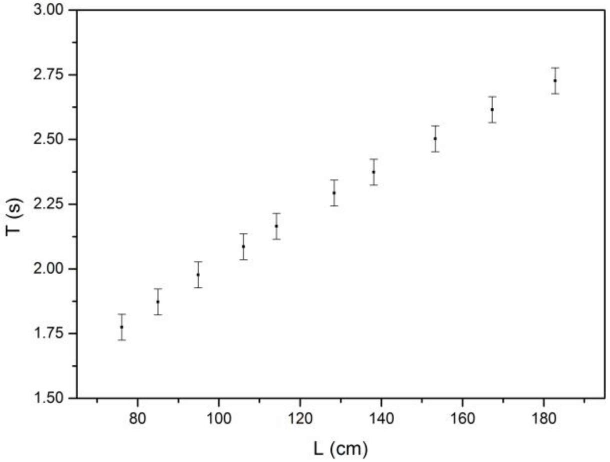
c) Graficar T vs L y T^2 vs L. ¿Qué correlaciones tienen estas magnitudes? Reescribir la ecuación del período.

d) Realizar un ajuste lineal por cuadrados mínimos en el gráfico **correspondiente** y determinar g y la incerteza asociada. Comparar con la predicción teórica.

¡A medir!

3) Resultados y análisis

- <u>Gráfico de T vs L</u>



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{g^{1/2}}\, l^{1/2}$$

Reescribo como potencia.
La relación **NO** es lineal!
La relación funcional entre T y L es una relación de potencia o raíz cuadrada

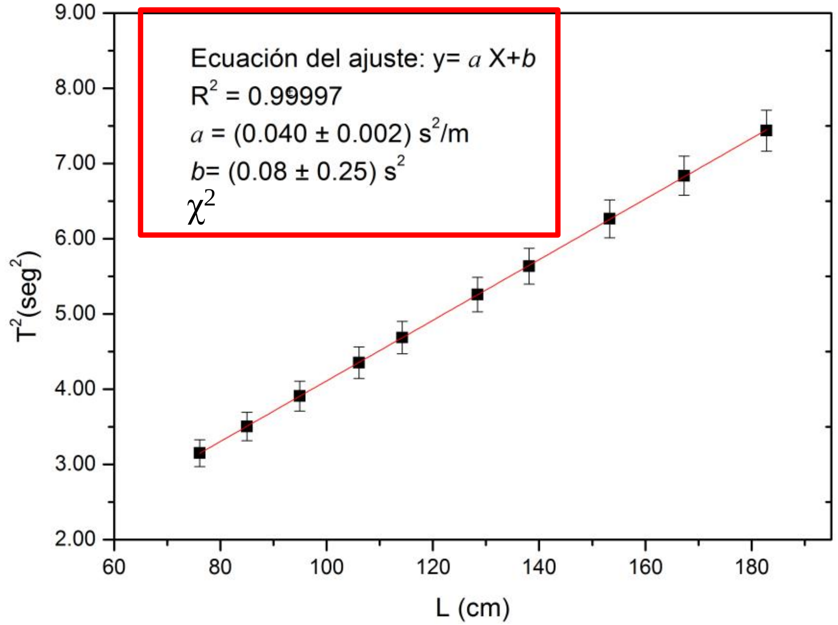
- <u>Gráfico de T^2 vs L</u>

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\, l$$

¿Cómo obtengo g?

$$a = 0.040 = \frac{4\pi^2}{g} \quad\Rightarrow\quad g = \frac{4\pi^2}{a}$$

Y la incerteza de g? Debo propagar el error!!



- Y la ordenada al origen, *b*, qué valor debería de ser?
- Este método es exacto? Comparar con el valor de tabla (está en página de la materia).
- <u>Para pensar</u>: qué debo graficar T^2 vs L ó L vs T^2? qué variable tiene más incerteza?