

# Movimiento armónico simple y amortiguado

# ¿Como lo modelamos?

## Resortes



$L_0$  = longitud natural

$k$  = constante elástica

**¿Que cosas en la naturaleza se pueden describir con Mov Arm Simple?**

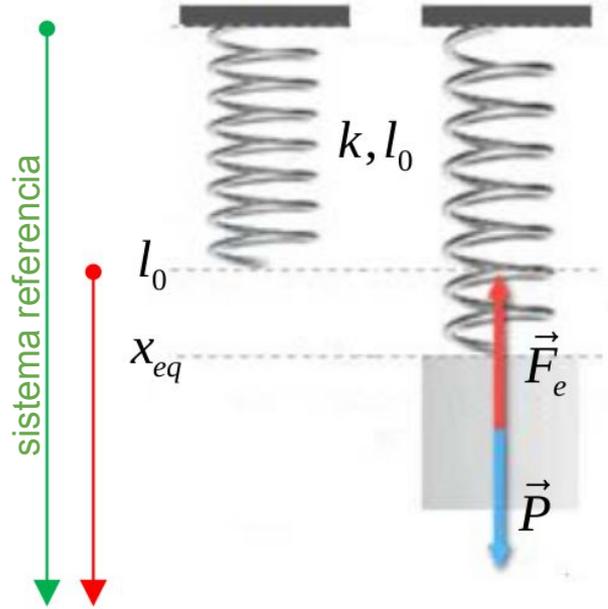
- Vibración de átomos
- Instrumentos musicales
- Péndulo

# Objetivo

Buscamos testear el modelo de movimiento armónico simple y amortiguado.

- Buscaremos encontrar el valor de la constante  $k$  del resorte.

# Repaso: Caso estático



$$P = mg$$

$$F_e = -k\Delta x = -k(x - l_0)$$

$$\Sigma F = ma$$

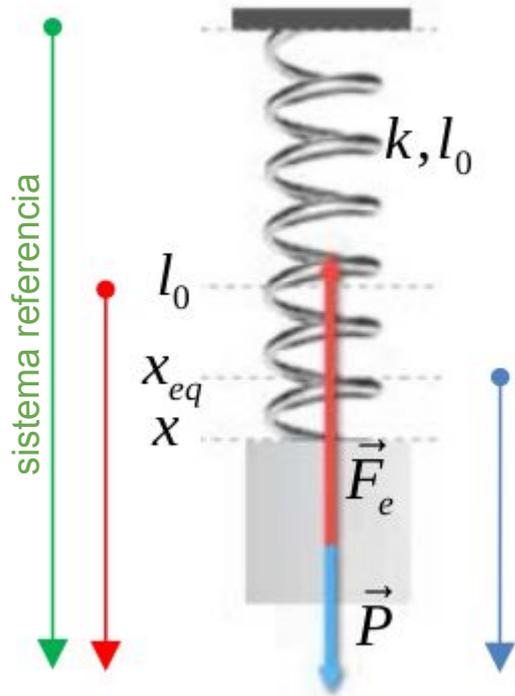
$$a = 0 \quad \text{Estático}$$

$$P + F_e = 0$$

$$mg - k(x_{eq} - l_0) = 0$$

$$\rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0$$

# Repaso: Caso dinámico



$$P = mg$$

$$F_e = -k\Delta x = -k(x - l_0)$$

$$\Sigma F = ma$$

$$P + F_e = ma = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Ecuación diferencial

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

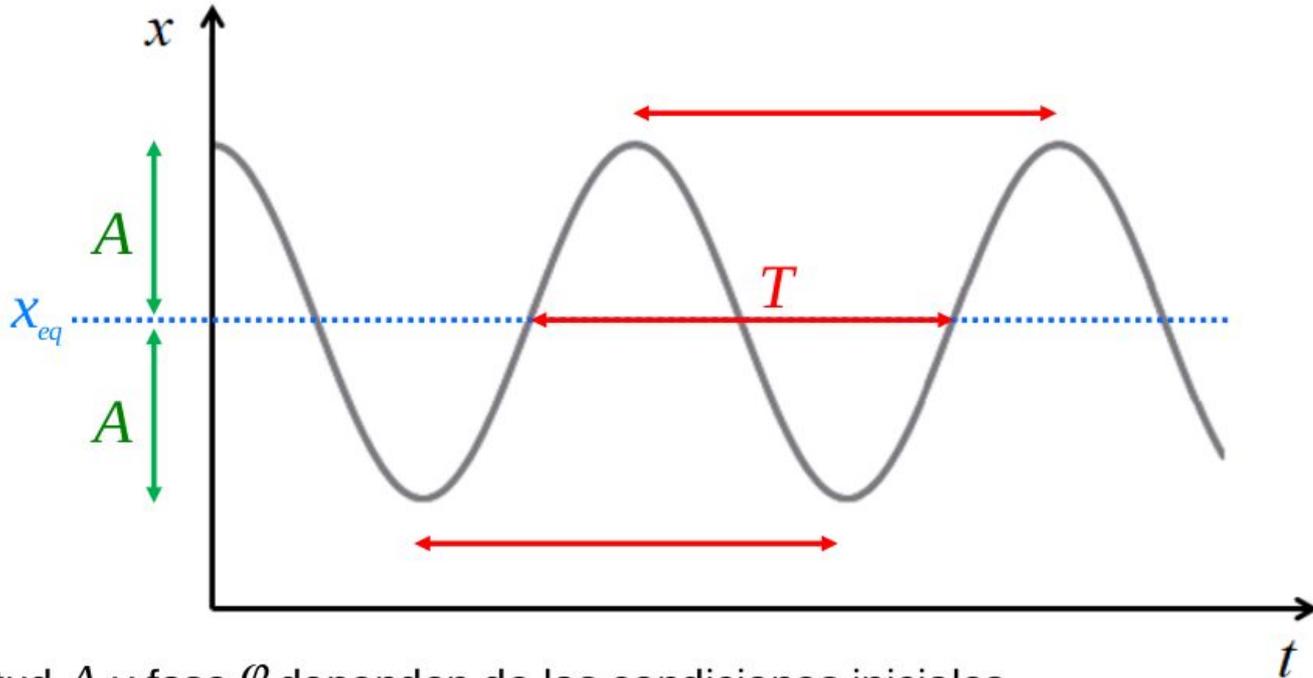
Frecuencia natural

# Movimiento armónico simple

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

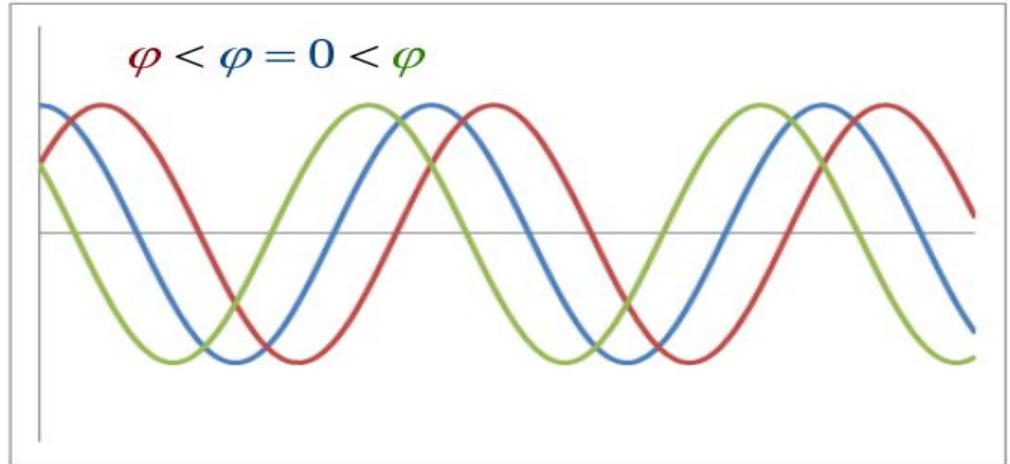
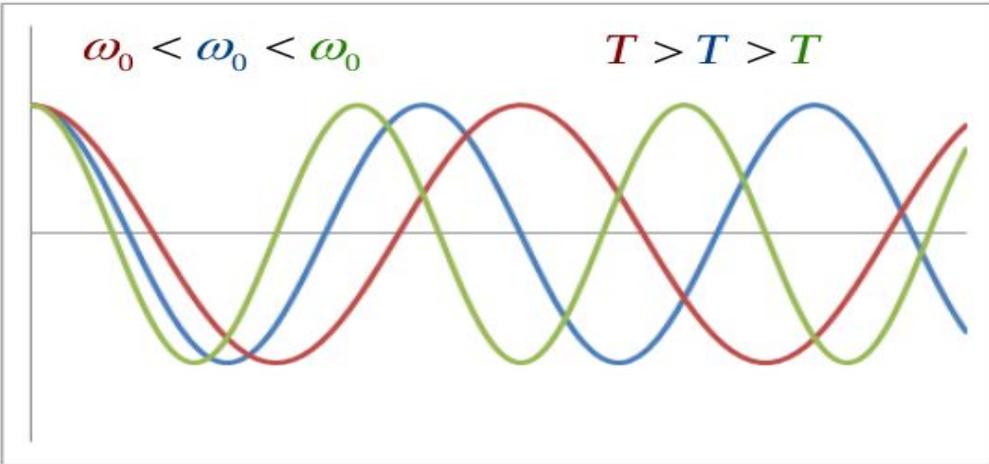
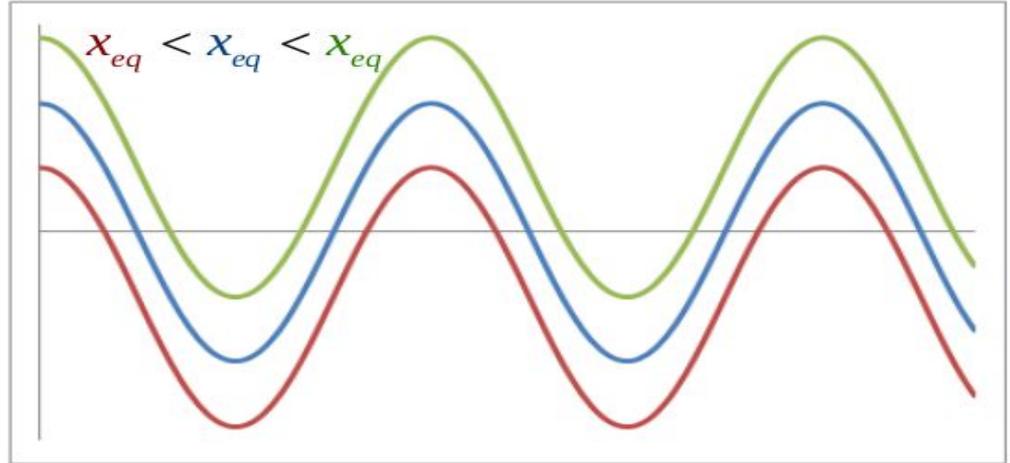
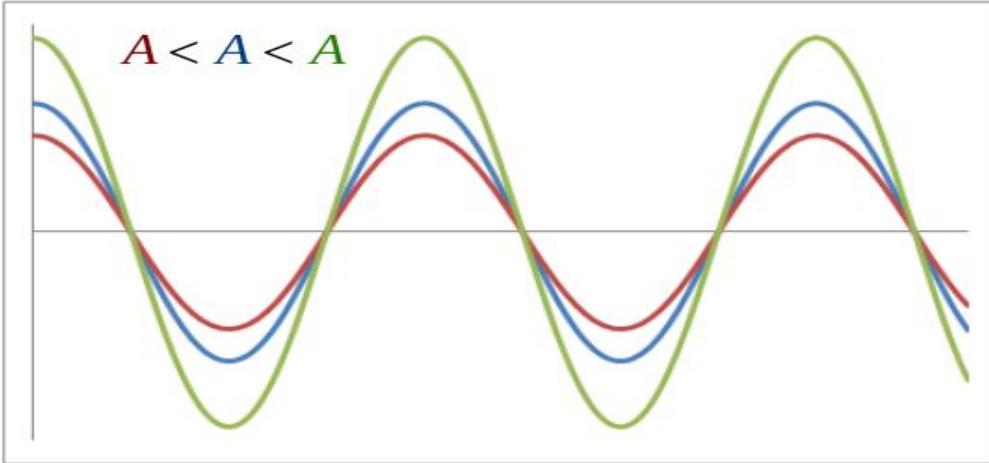
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{eq}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

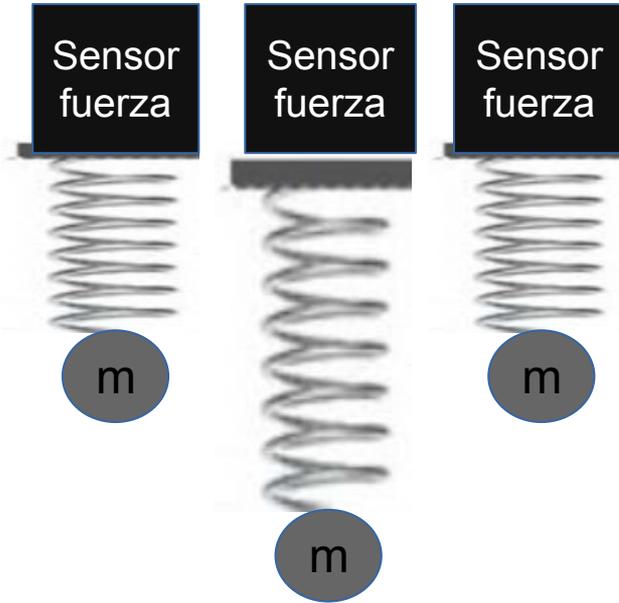


Amplitud  $A$  y fase  $\phi$  dependen de las condiciones iniciales

# Movimiento armónico simple



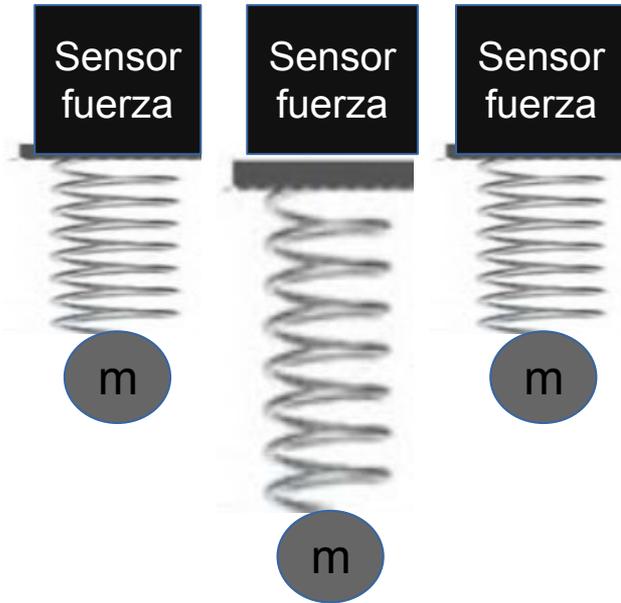
# Movimiento armónico simple



## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo.
- Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

# Movimiento armónico simple



## A realizar:

- **Medir fuerza en función del tiempo.**
- Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

# Sensor de fuerza



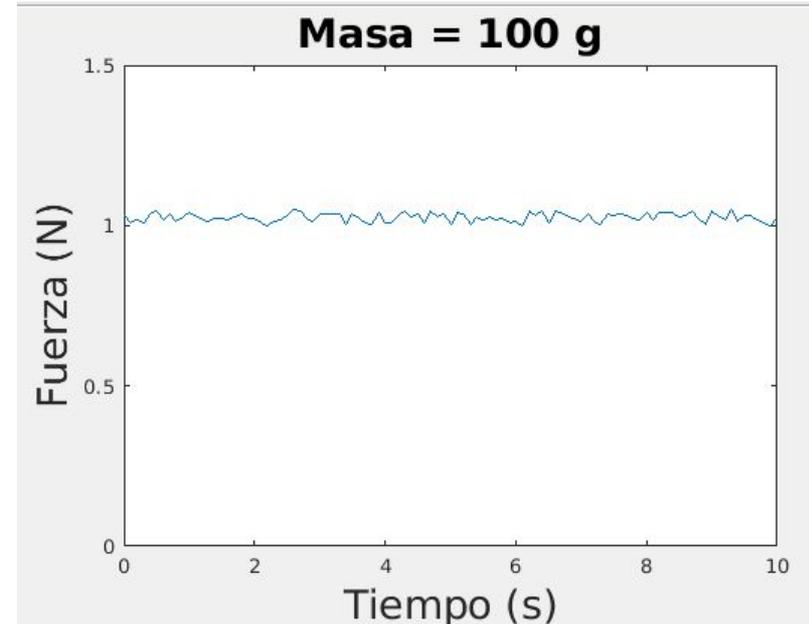
## Dos posiciones

- Fuerza max < 10 N → 1kg
- Fuerza max < 50 N → 5 kg

## ¿Cómo determinar el error?

Puedo realizar una medición estática con una fuerza conocida

Leer el manual



# Sensor de fuerza



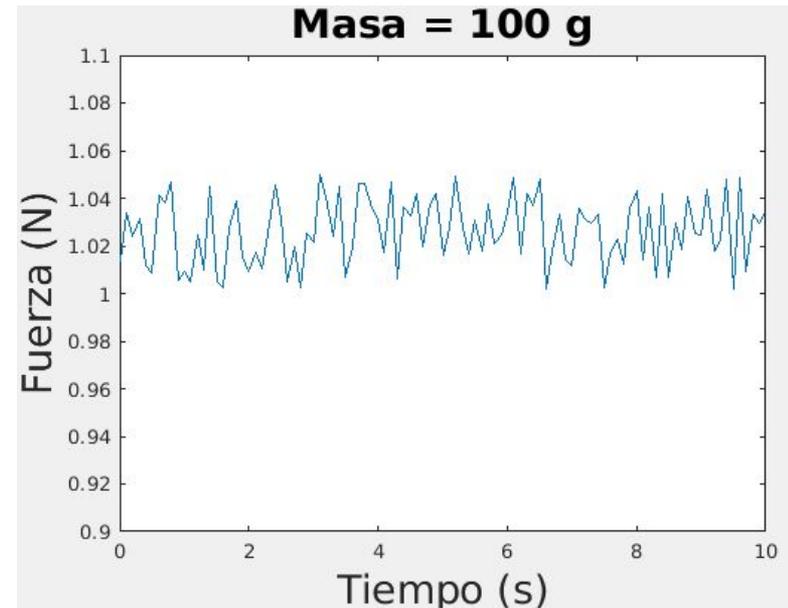
## Dos posiciones

- Fuerza max  $< 10\text{ N}$   $\rightarrow 1\text{ kg}$
- Fuerza max  $< 50\text{ N}$   $\rightarrow 5\text{ kg}$

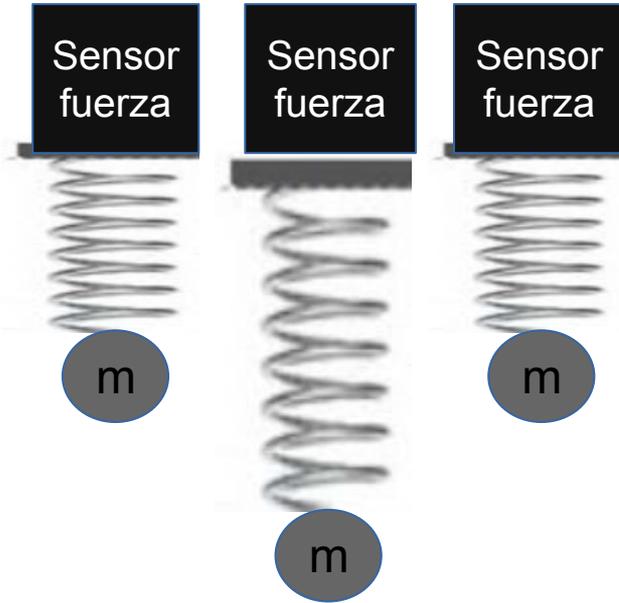
## ¿Cómo determinar el error?

Puedo realizar una medición estática con una fuerza conocida

Leer el manual



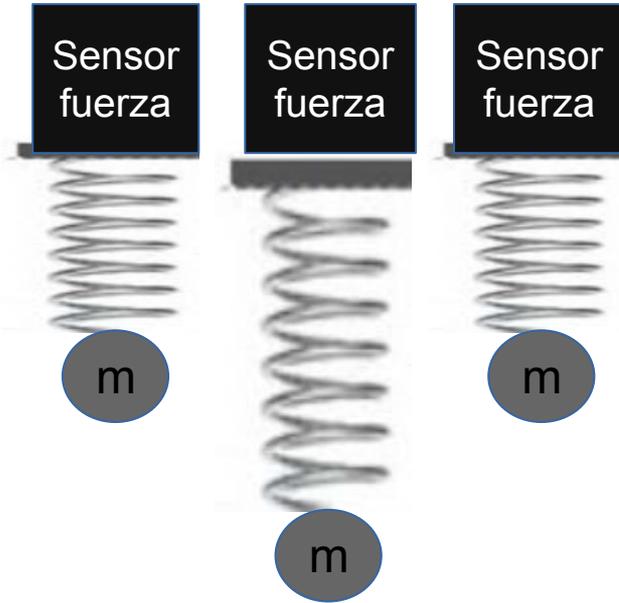
# Movimiento armónico simple



## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo.
- Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

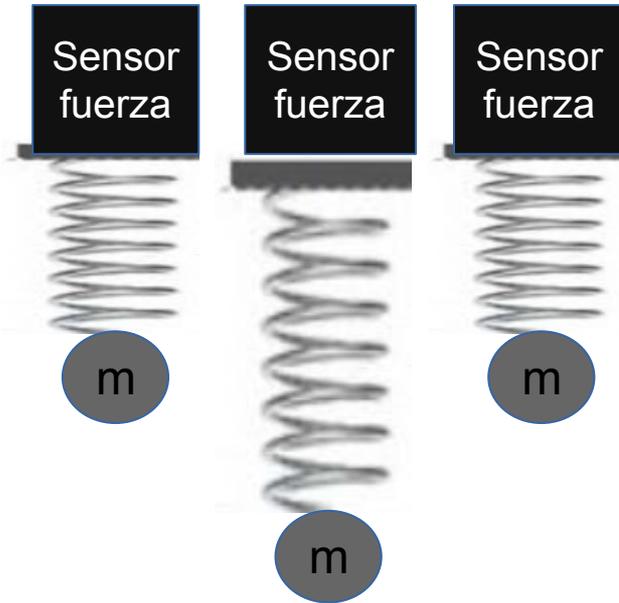
# Movimiento armónico simple



## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo.
- **Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).**
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

# Movimiento armónico simple



## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo.
- **Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).**
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

**¿Cómo estimar la frecuencia de oscilación?**

A través del período.

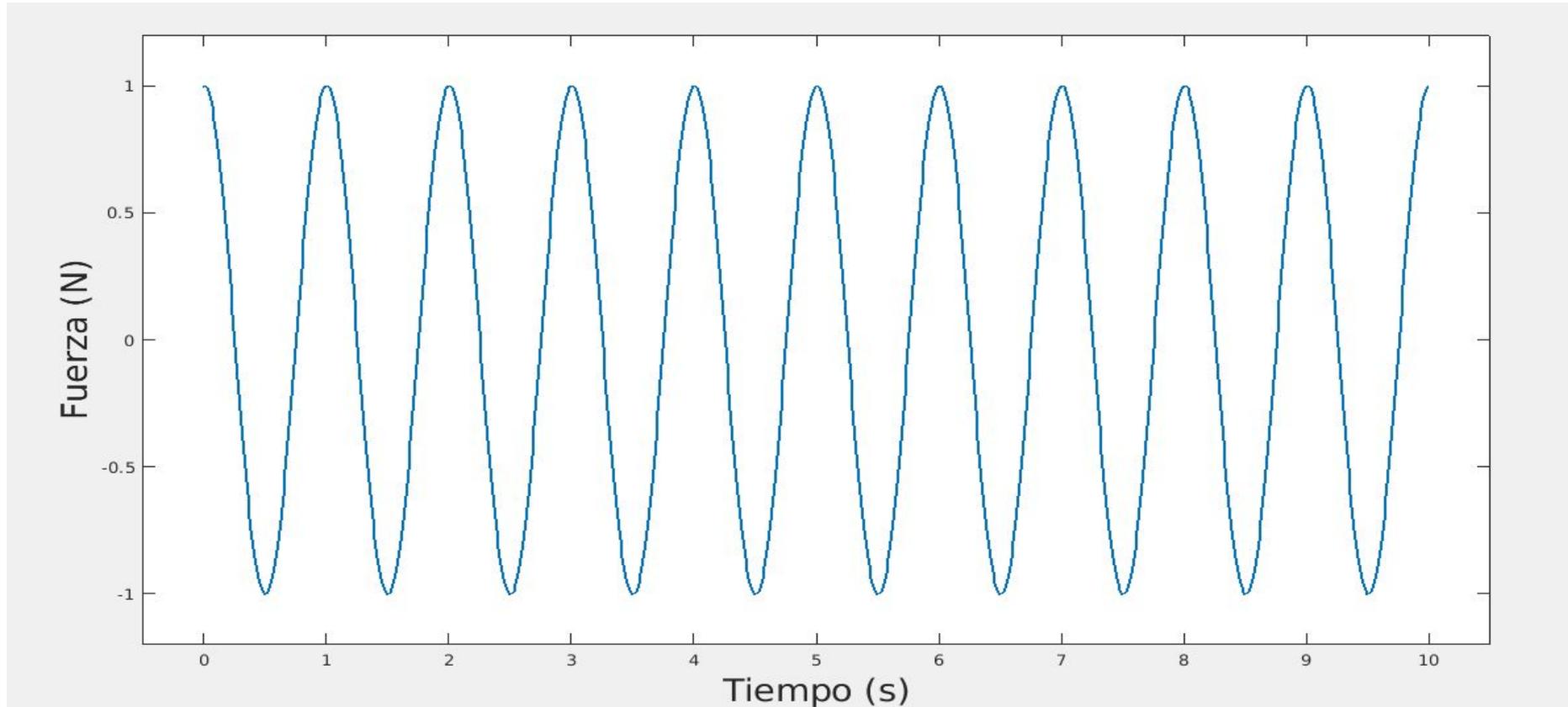
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

## Atención:

Tomar primero un solo dato, fijarse de poder calcular la frecuencia de oscilación y después seguir tomando datos

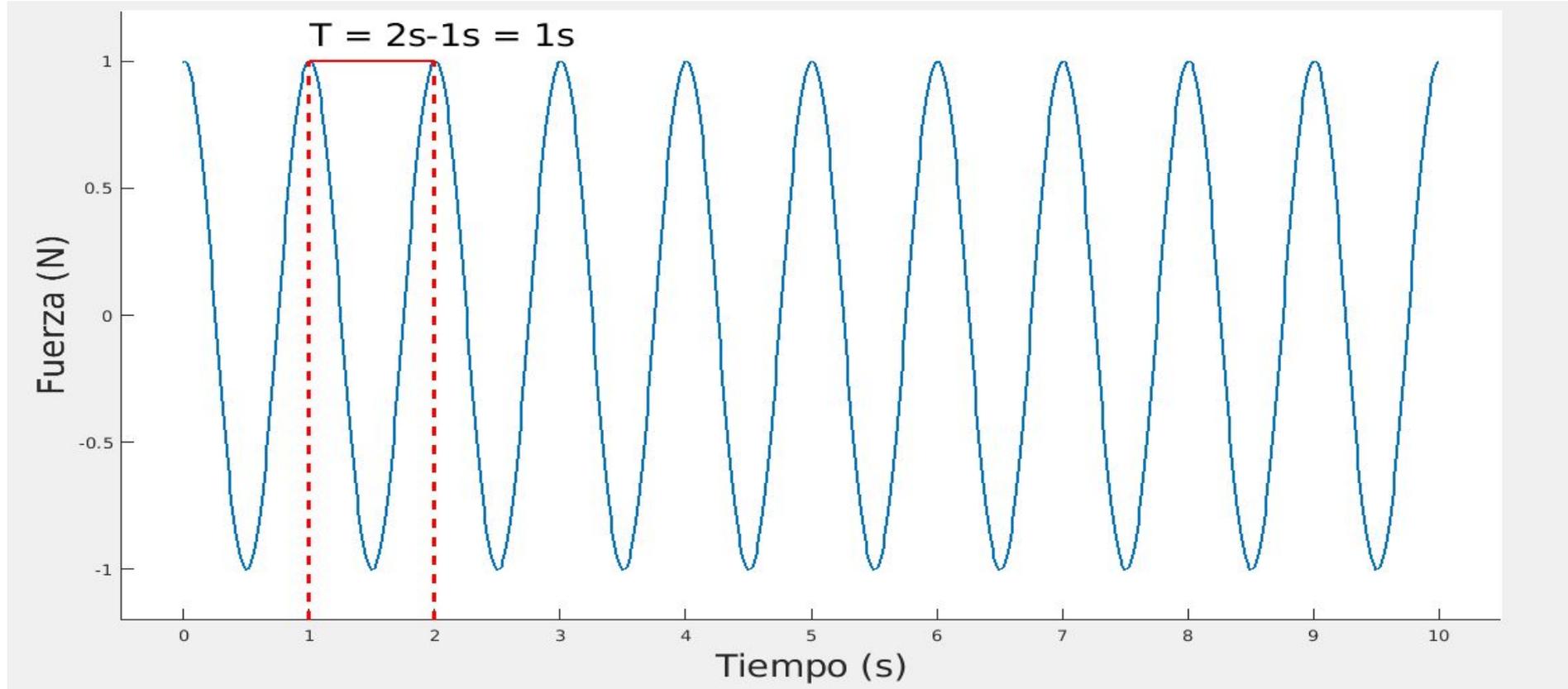
# Estimar período

Estimar frecuencia  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$



# Estimar período

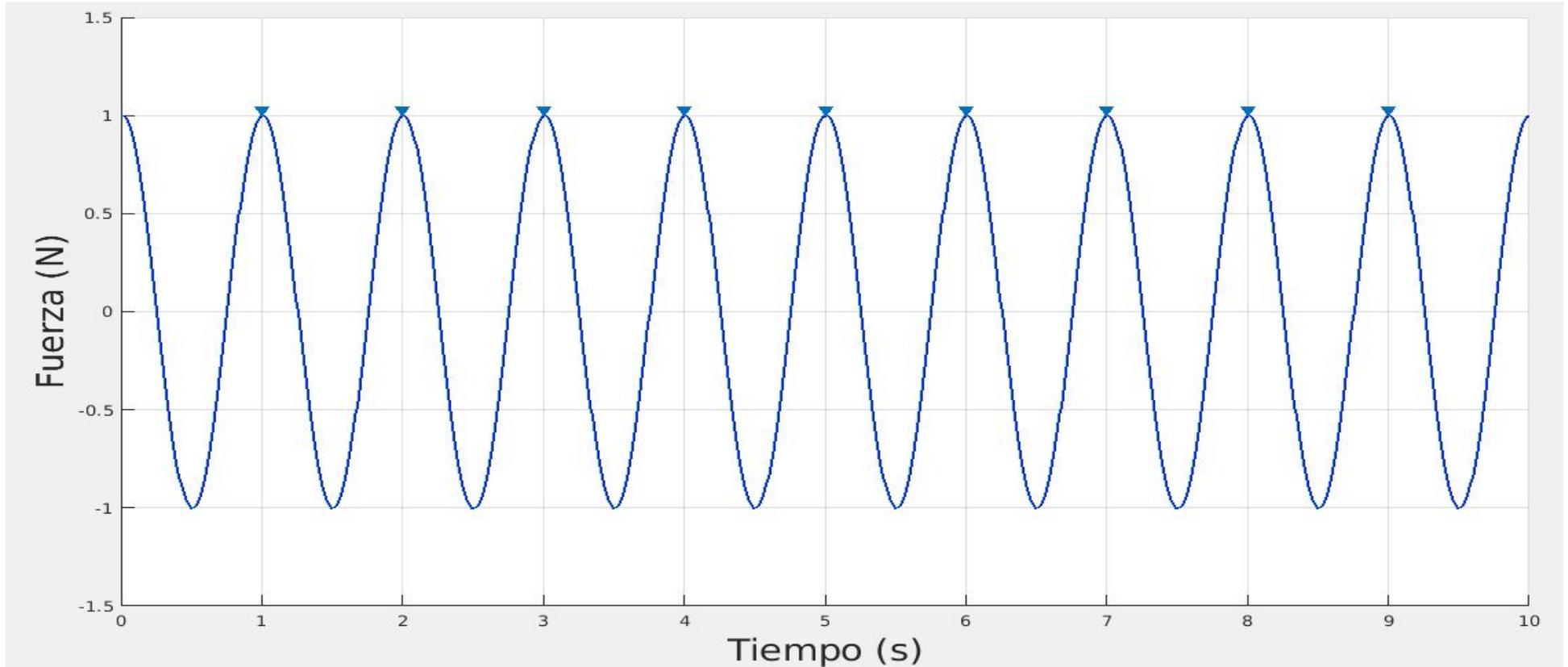
Estimar frecuencia  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$



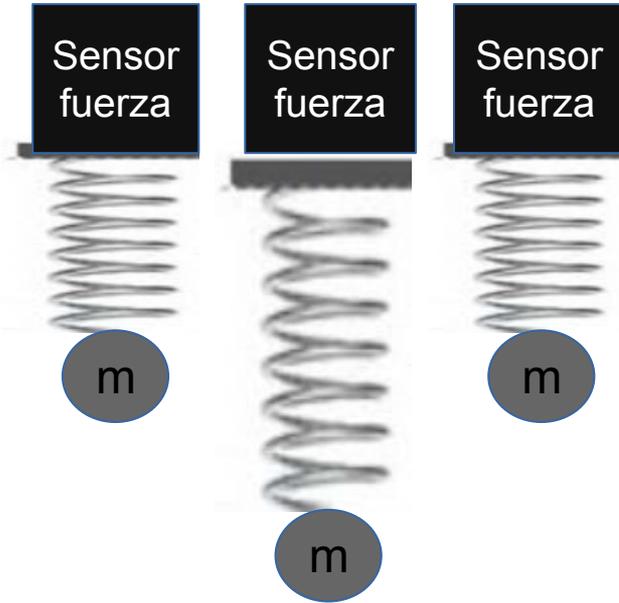
# Estimar período

Estimar frecuencia  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$

Buscar picos y restarlos!!!



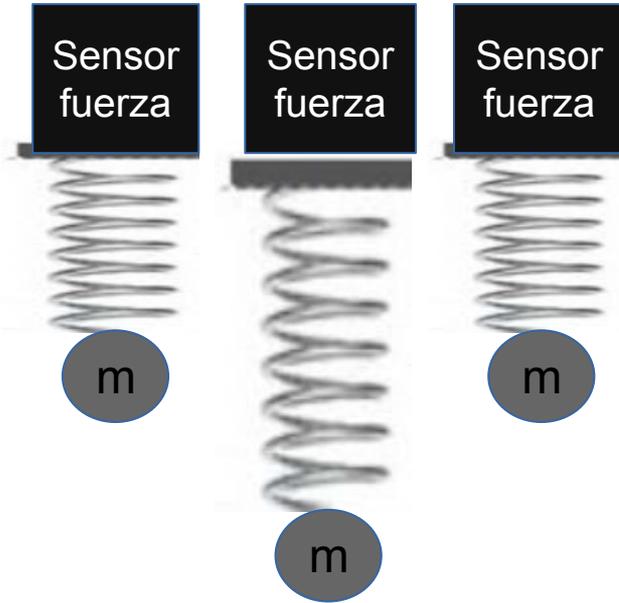
# Movimiento armónico simple



## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo.
- Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

# Movimiento armónico simple

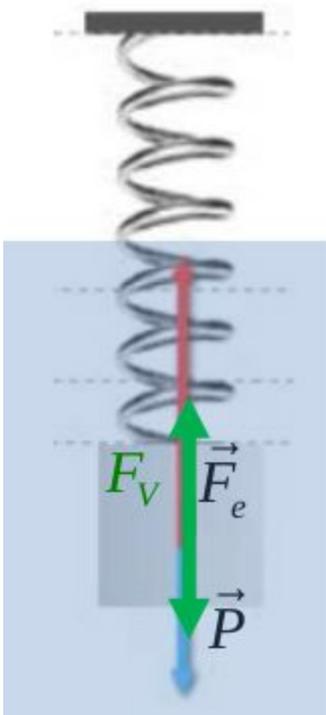


## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo.
- Variar la masa ( $m$ ) para variar la frecuencia de oscilación ( $\omega_0$ ) (por lo menos 7 masas).
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Calcular  $k$ .

Misma estrategia (y código Colab) de la vez pasada

# ¿Qué pasa si hay amortiguación?



$$F_v = -b\dot{x} \quad \text{Fuerza disipativa}$$

$$P + F_e + F_v = m\ddot{x}$$
$$mg - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{b}{m}\right)}_{2\gamma} \dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} x = g$$

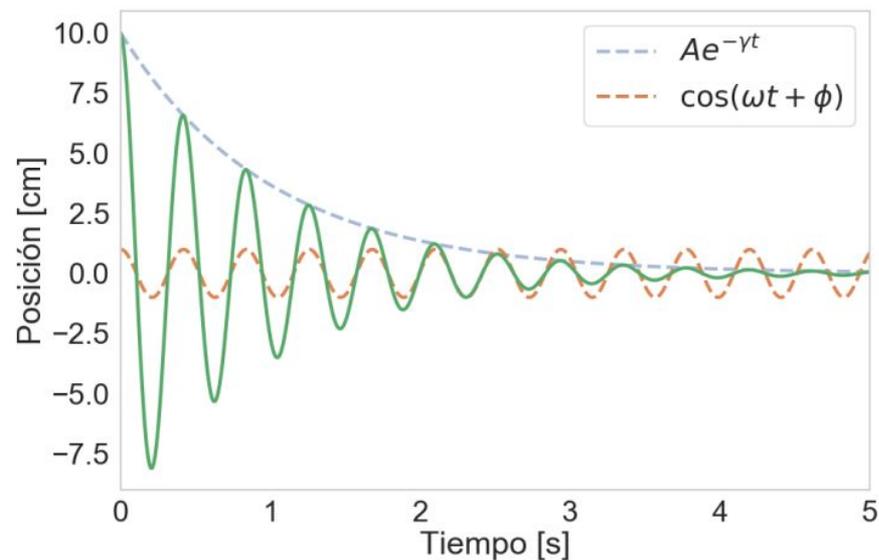
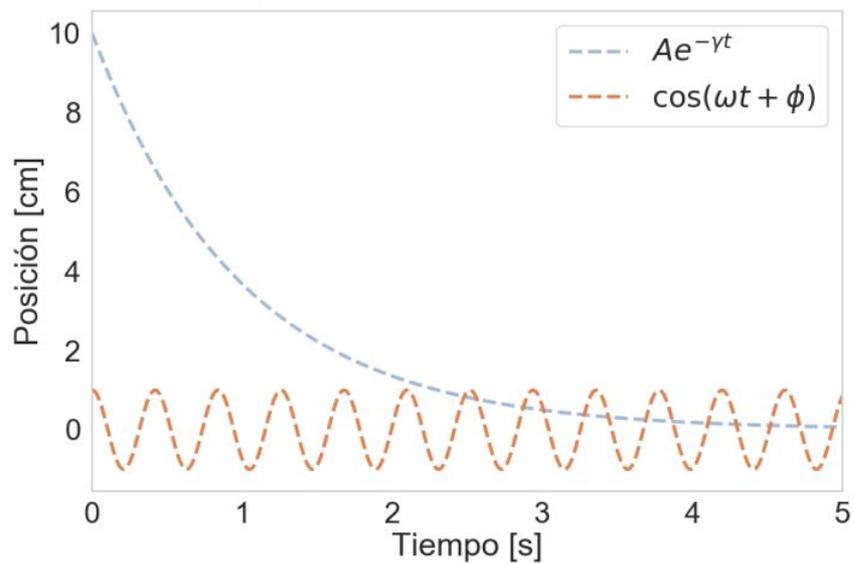
# Movimiento Armónico Amortiguado

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

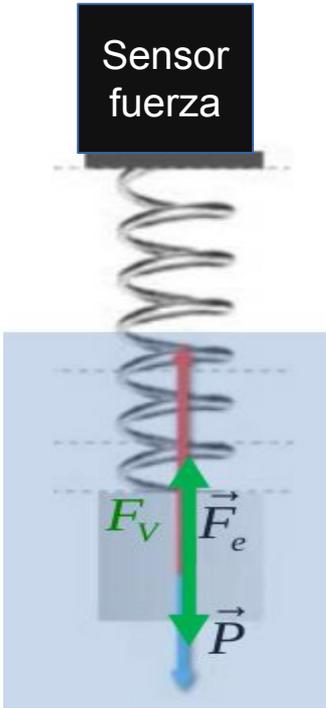
$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$\gamma$  Coeficiente de amortiguamiento



# Actividad 2: Ajuste no lineal



$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq}$$

$$F(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$

## A realizar:

- Medir fuerza en función del tiempo para una sola masa
- Hacer ajuste no lineal.
- Estimar  $k$  y  $\gamma$ .

¿Como hacer ajuste no lineal?

# Actividad 2: Ajuste no lineal

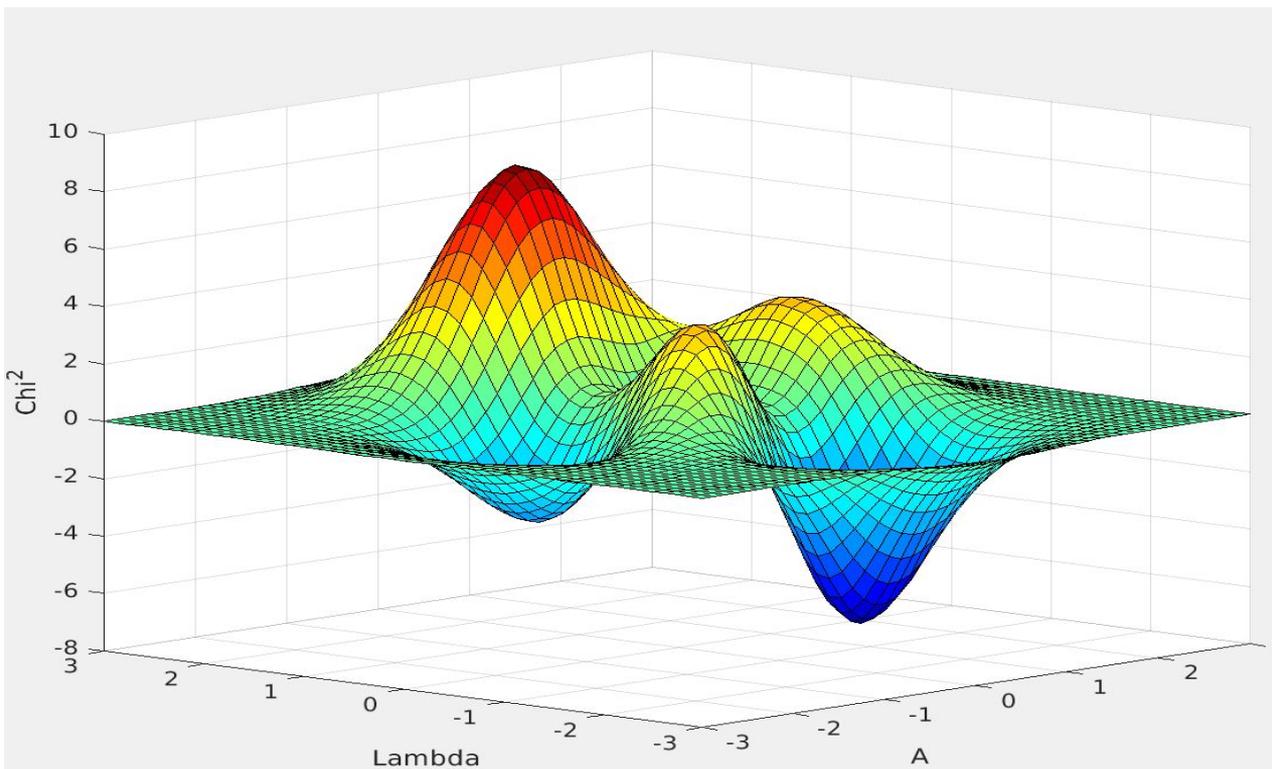
¿Cómo hacer ajuste no lineal? Este tipo de ajuste no es posible sin saber una estimación previa de los parámetros.

Busca minimizar el  $\text{Chi}^2$

$$\chi^2 = \sum \left[ \frac{y_i - (mx_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Ejemplo ilustrativo

$$Ae^{-\lambda t}$$



# Dinámico. Actividad 2

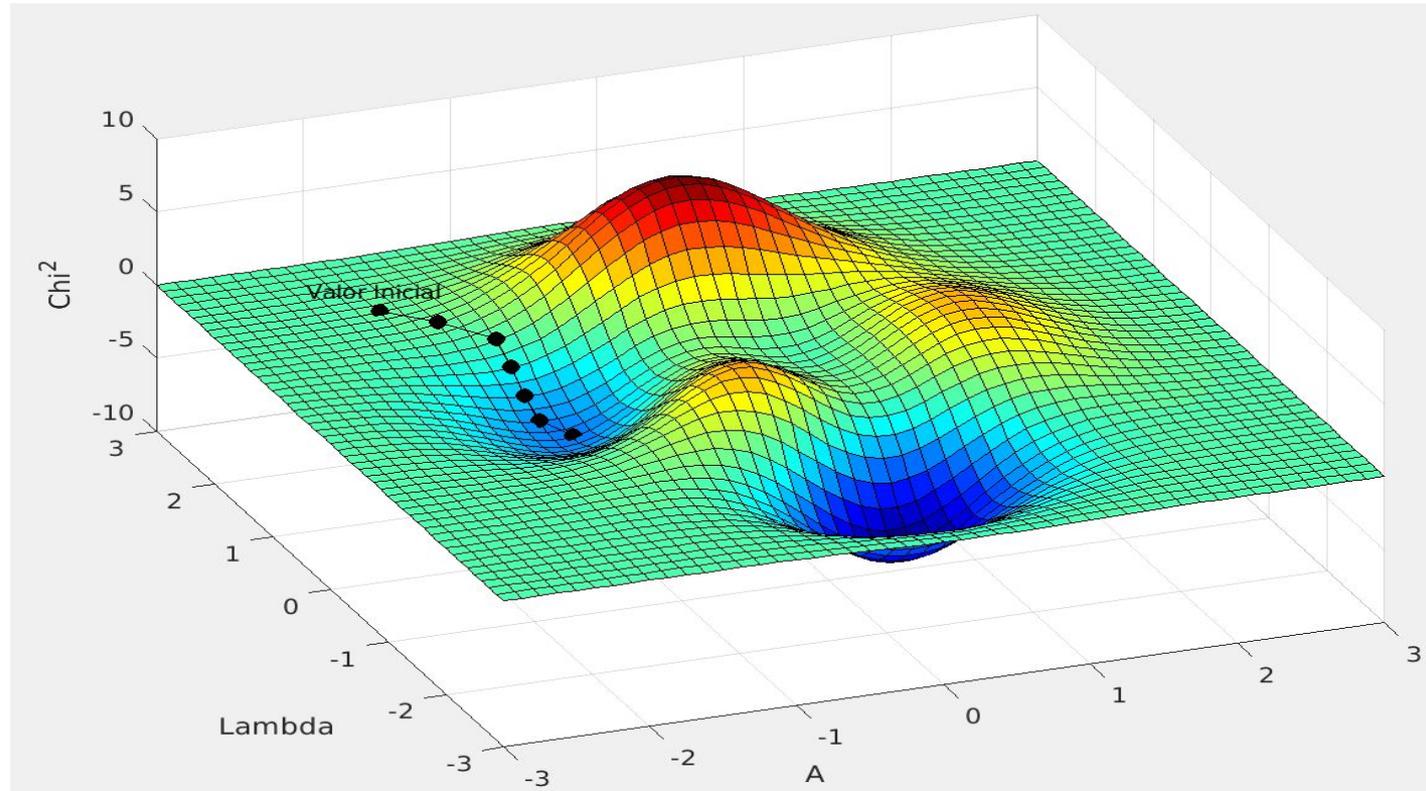
Como hacer ajuste no lineal? Este tipo de ajuste no es posible sin saber una estimación previa de los parámetros.

Busca minimizar el  $\text{Chi}^2$

$$\chi^2 = \sum \left[ \frac{y_i - (mx_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Ejemplo ilustrativo

$$Ae^{-\lambda t}$$



# En resumen

## Actividad 1

### Caso dinámico.

- Dejar oscilar el resorte para varias masas.
- Hallar la frecuencia de oscilación (buscando picos).
- Linealizar.
- Hacer ajuste lineal.
- Hallar k.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

## Actividad 2

### Caso amortiguado.

- Dejar oscilar el resorte para una masa en un medio viscoso.
- Graficar fuerza en función del tiempo.
- Hacer ajuste no lineal.
- Hallar k y gamma.

$$F(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0$$