Física 2. 2003. (Oscar E. Martínez) Guía 6

1.- a) Determine cuáles de las siguientes expresiones matemáticas satisfacen la ecuación de ondas clásica:

i) $\Psi(z,t)= A \exp[-\lambda(ax-bt)^2]$, $\lambda \varepsilon \wedge$

ii) $\Psi(z,t)= A (z+vt)$

iii) $\Psi(z,t)= A \operatorname{sen}(az+bt)$

iv) $\Psi(z,t)= A \operatorname{sen}(ax^2-bt^2)$

b) Demueste que cualquier función de la forma $f(z\pm vt)$ es solución de la ecuación de ondas clásica.

2.- a) Demuestre que la suma de dos ondas armónicas que se propagan en la dirección +z: $A_1=\cos(\omega t-kz+\phi_1)$ y $A_2=\cos(\omega t-kz+\phi_2)$ y que tienen la misma frecuencia ω, es una onda armónica de propagación del mismo tipo. Esto es la suma puede escribirse en la forma $A=\cos(\omega t-kz+\phi)$. Encuentre cómo están relacionados A y ϕ con A_1, **A_2,** ϕ_1 y **ϕ_2.** Resuélvalo también en notación compleja y compare ambos resultados.

b) Calcule la superposición de dos ondas armónicas $A_1=\cos(\omega_1 t-k_1 z+\phi_1)$ y $A_2=\cos(\omega_2 t-k_2 z+\phi_2)$ que se propagan en la dirección +z. Sepárelas en una portadora a frecuencia promedio multiplicada por la envolvente. Verifique que si las frecuencias son iguales o las amplitudes lo son recupera resultados anteriores.

c) Encuentre el módulo al cuadrado de la envolvente y muestre que evoluciona en el tiempo o en el espacio siguiendo una elipse en el plano complejo. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos?.

d) ¿cómo se propaga la energía de esa superposición?

3.- Se superponen una onda de frecuencia ω_o de amplitud A con otras dos de frecuencias corridas en $\pm\Delta\omega$ de amplitud iguales B.

a) Calcule la envolvente de esta superposición en el origen.
b) Calcule la envolvente de la onda propagada suponiendo que $\Delta\omega \ll \omega_o$. Discuta que pasa si no vale esta aproximación.

4.- calcule la velocidad de fase y de grupo para la ecuación de Klein-Gordon.

5.- Se encuentra a partir de un modelo* que las ondas superficiales en un líquido satisfacen la siguiente relación de dispersión:

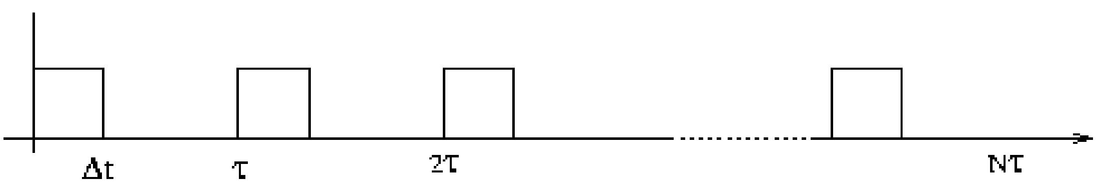
$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho}k^3\right)\left[\frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}}\right]$$

donde g es la aceleración de la gravedad, T es la tensión superficial (aproximadamente 72dinas/cm para el agua), ρ es la densidad del líquido y h es la profundidad.

a) encuentre la relación de dispersión en el límite de aguas muy profundas ($h \gg \lambda$) y en el opuesto de aguas poco profundas. Discuta en que rango de frecuencias y profundidades vale cada aproximación.
b) Encuentre las velocidades de fase y de grupo en ambos límites.
c) Se realiza un experimento de propagación de ondas en que se golpea periódicamente la superficie del agua. Discuta que se observa en cada caso.

*ver libro Ondas de Crawford, cap. 7

6.- Calcule y grafique el módulo y la fase de C_n (coeficientes del desarrollo en serie de Fourier) de la función periódica:



Para: a) $\tau=T_1$ y $\Delta t=\tau_1$. b) $\tau=10T_1$ y $\Delta t=\tau_1$ .c) $\tau=100T_1$ y $\Delta t=\tau_1$. D) $\tau=10T_1$ y $\Delta t=\tau_1$.
Indique una estimación del ancho del espectro de frecuencias para cada caso.

7.- Repita el problema anterior para:

7.- Calcule como cambia C_n en los problemas anteriores (6 y 7) si se corre la función en una cantidad t_o hacia la derecha.

8.-¿Cómo cambia la función del tiempo si en los casos de los problemas 6 y 7 se agrega una fase lineal con la frecuencia $\phi(\omega)=\alpha\omega$ a cada componente $C_n(\omega_n)$?

9.- Si se toma la función de los problemas 6 y 7 como moduladoras o envolventes y se las multiplica por una portadora $\exp(i\omega_o t)$ (fase lineal con el tiempo),
a) ¿cómo quedan los nuevos coeficientes de la serie de Fourier. Hacer un gráfico cualitativo.
b) Si dicha perturbación se propaga a derecha con una relación de dispersión $\omega=ck$, hallar $\psi(t,z)$.
c) idem b, si $\omega=ak+b$. ¿A qué velocidad se propaga la portadora y a cuál la envolvente?

10.- Hallar la función del tiempo que tiene como coeficientes de Fourier $C_n= C$ (constante) para $n=M$ hasta $M+N$ ($M>>N$). Dar el valor de la frecuencia portadora. Estimar su ancho temporal
Repetir los puntos b y c del problema anterior.

11.- Demuestre la siguiente igualdad $\int_0 e^{inkx}\, e^{imkx}\, dx = \lambda\, \delta_{nm}$
donde n y m son enteros distintos de cero y δ_{nm} es la delta de Krönecker.