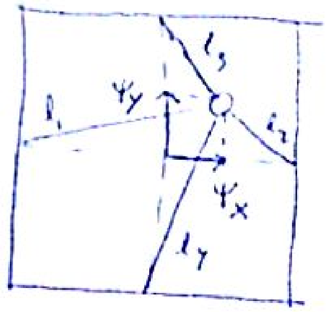
Consideremos un sistema como el de la figura.



Los resortes horizontales (1 y 2) tienen constante elástica k_x mientras que los verticales (3, 4) tienen constante k_y.

La idea es mostrar que, en la aproximación lineal, el desplazamiento ψ_x no afecta al desplazamiento ψ_y $\rightarrow$ las ecuaciones en x e y están desacoplados.

Consideremos un desplazamiento $\vec{\psi} = \psi_x \hat{x} + \psi_y \hat{y}$. La ecuación de movimiento en dirección x es:

$$m\ddot{\psi}_x = -k_x(l_1 - l_0)\frac{(\psi_x + d)}{l_1} + k_x(l_2 - l_0)\frac{(d - \psi_x)}{l_2} - k_y(l_3 - l_0)\frac{\psi_x}{l_3} - k_y(l_4 - l_0)\frac{\psi_x}{l_4}$$

$$= -k_x\left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right)(\psi_x + d) + k_x\left(1 - \frac{l_0}{l_2}\right)(d - \psi_x) - k_y\left(1 - \frac{l_0}{l_3}\right)\psi_x - k_y\left(1 - \frac{l_0}{l_4}\right)\psi_x$$

Claramente l_i depende de ψ_x y ψ_y. Explícitamente

$$l_1 = \sqrt{(\psi_x + d)^2 + \psi_y^2} \qquad l_2 = \sqrt{(d - \psi_x)^2 + \psi_y^2}$$

$$l_3 = \sqrt{\psi_x^2 + (d - \psi_y)^2} \qquad l_4 = \sqrt{\psi_x^2 + (d + \psi_y)^2}$$

Ahora vamos a escribir la ecuación a primer orden en ψ_x y ψ_y. Para esto debemos hacer un desarrollo de las funciones $\frac{l_0}{l_i(\psi_x, \psi_y)}$ a primer orden. Recordemos que una función de 2 variables x e y tiene el siguiente desarrollo

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

Considerando $x = \psi_x$ $y = \psi_y$ $x_0 = y_0 = 0$

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{l_0}{d\sqrt{\left(1+\frac{\psi_x}{d}\right)^2+\left(\frac{\psi_y}{d}\right)^2}} \simeq \frac{l_0}{d}\left(1-\frac{\psi_x}{d}\right)$$

$$\frac{l_0}{l_2} = \frac{l_0}{d\sqrt{\left(1-\frac{\psi_x}{d}\right)^2+\left(\frac{\psi_y}{d}\right)^2}} \simeq \frac{l_0}{d}\left(1+\frac{\psi_x}{d}\right)$$

$$\frac{l_0}{l_3} = \frac{l_0}{d\sqrt{\left(\frac{\psi_x}{d}\right)^2+\left(1-\frac{\psi_y}{d}\right)^2}} \simeq \frac{l_0}{d}\left(1+\frac{\psi_y}{d}\right)$$

$$\frac{l_0}{l_4} = \frac{l_0}{d\sqrt{\left(\frac{\psi_x}{d}\right)^2+\left(1+\frac{\psi_y}{d}\right)^2}} \simeq \frac{l_0}{d}\left(1-\frac{\psi_y}{d}\right)$$

Luego la ecuación de movimiento queda:

$$m\ddot{\psi}_x = \overbrace{-k_x\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1-\frac{\psi_x}{d}\right]\right)(\psi_x+d)}^{1} + \overbrace{k_x\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1+\frac{\psi_x}{d}\right]\right)(d-\psi_x)}^{2} -$$

$$- \underbrace{k_y\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1+\frac{\psi_y}{d}\right]\right)\psi_x}_{3} - \underbrace{k_y\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1-\frac{\psi_y}{d}\right]\right)\psi_x}_{4}$$

ahora debemos quedarnos con los términos de primer orden

1 y 2: $\quad 1 + 2 = -k_x\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1-\frac{\psi_x}{d}\right]\right)\psi_x - k_x\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1+\frac{\psi_x}{d}\right]\right)\psi_x -$

$$-k_x\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1-\frac{\psi_x}{d}\right]\right)d + k_x\left(1-\frac{l_0}{d}\left[1+\frac{\psi_x}{d}\right]\right)d =$$

$$= -2k_x\psi_x$$

Generated by CamScanner from intsig.com

$$③ + ④ = \underbrace{-2K_y\left(1-\frac{l_0}{d}\right)\psi_x + 2K_y \frac{l_0}{d}\frac{\psi_y}{d}\psi_x}$$

término cuadrático o
de segundo orden
Lo tiramos

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{\psi}_x = -2K_x\psi_x - 2K_y\left(1-\frac{l_0}{d}\right)\psi_x}$$

~~Notar que el primer término $(-2K_x\psi_x)$ corresponde a las fuerzas de los resortes ① y ② como~~

Notar que esta ecuación corresponde al movimiento realizado por la partícula si SOLO se la desplaza en X

De la misma manera se puede demostrar que la ecuación para y es:

$$m\ddot{\psi}_y = -2K_y\psi_y - 2K_x\left(1-\frac{l_0}{d}\right)\psi_y$$