

**Guía 6**

1.- a) Determine cuáles de las siguientes expresiones matemáticas satisfacen la ecuación de ondas clásica:

i)  $\Psi(z,t) = A \exp[-\lambda(ax-bt)^2]$ ,  $\lambda \in \wedge$

ii)  $\Psi(z,t) = A(z+vt)$

iii)  $\Psi(z,t) = A \text{sen}(az+bt)$

iv)  $\Psi(z,t) = A \text{sen}(ax^2-bt^2)$

b) Demuestre que cualquier función de la forma  $f(z\pm vt)$  es solución de la ecuación de ondas clásica.

2.- a) Demuestre que la suma de dos ondas armónicas que se propagan en la dirección  $+z$ :  $A_1 = \cos(\omega t - kz + \phi_1)$  y  $A_2 = \cos(\omega t - kz + \phi_2)$  y que tienen la misma frecuencia  $\omega$ , es una onda armónica de propagación del mismo tipo. Esto es la suma puede escribirse en la forma  $A = \cos(\omega t - kz + \phi)$ . Encuentre cómo están relacionados  $A$  y  $\phi$  con  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Resuélvalo también en notación compleja y compare ambos resultados.

b) Calcule la superposición de dos ondas armónicas  $A_1 = \cos(\omega_1 t - k_1 z + \phi_1)$  y  $A_2 = \cos(\omega_2 t - k_2 z + \phi_2)$  que se propagan en la dirección  $+z$ . Sepárelas en una portadora a frecuencia promedio multiplicada por la envolvente. Verifique que si las frecuencias son iguales o las amplitudes lo son recupera resultados anteriores.

c) Encuentre el módulo al cuadrado de la envolvente y muestre que evoluciona en el tiempo o en el espacio siguiendo una elipse en el plano complejo. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos?.

d) ¿cómo se propaga la energía de esa superposición?

3.- Se superponen una onda de frecuencia  $\omega_0$  de amplitud  $A$  con otras dos de frecuencias corridas en  $\pm \Delta\omega$  de amplitud iguales  $B$ .

a) Calcule la envolvente de esta superposición en el origen.

b) Calcule la envolvente de la onda propagada suponiendo que  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Discuta que pasa si no vale esta aproximación.

4.- calcule la velocidad de fase y de grupo para la ecuación de Klein-Gordon.

5.- Se encuentra a partir de un modelo\* que las ondas superficiales en un líquido satisfacen la siguiente relación de dispersión:

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{T}{\rho} k^3 \right) \left[ \frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}} \right]$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $T$  es la tensión superficial (aproximadamente 72 dinas/cm para el agua),  $\rho$  es la densidad del líquido y  $h$  es la profundidad.

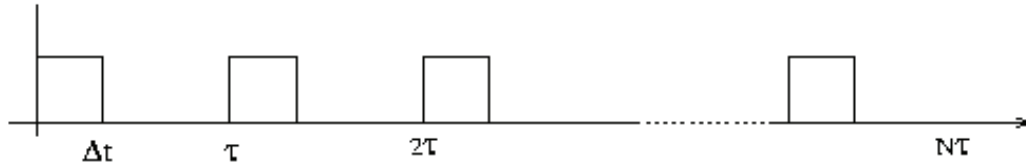
a) encuentre la relación de dispersión en el límite de aguas muy profundas ( $h \gg \lambda$ ) y en el opuesto de aguas poco profundas. Discuta en que rango de frecuencias y profundidades vale cada aproximación.

b) Encuentre las velocidades de fase y de grupo en ambos límites.

c) Se realiza un experimento de propagación de ondas en que se golpea periódicamente la superficie del agua. Discuta que se observa en cada caso.

\*ver libro Ondas de Crawford, cap. 7

6.- Calcule y grafique el módulo y la fase de  $C_n$  (coeficientes del desarrollo en serie de Fourier) de la función periódica:



Para: a)  $\tau=T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ . b)  $\tau=10T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ . c)  $\tau=100T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ . D)  $\tau=10T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ .  
Indique una estimación del ancho del espectro de frecuencias para cada caso.

7.- Repita el problema anterior para:



7.- Calcule como cambia  $C_n$  en los problemas anteriores (6 y 7) si se corre la función en una cantidad  $t_0$  hacia la derecha.

8.-¿Cómo cambia la función del tiempo si en los casos de los problemas 6 y 7 se agrega una fase lineal con la frecuencia  $\phi(\omega)=\alpha\omega$  a cada componente  $C_n(\omega_n)$ ?

9.- Si se toma la función de los problemas 6 y 7 como moduladoras o envolventes y se las multiplica por una portadora  $\exp(i\omega_0 t)$  (fase lineal con el tiempo),

- ¿cómo quedan los nuevos coeficientes de la serie de Fourier. Hacer un gráfico cualitativo.
- Si dicha perturbación se propaga a derecha con una relación de dispersión  $\omega=ck$ , hallar  $\psi(t,z)$ .
- idem b, si  $\omega=ak+b$ . ¿A qué velocidad se propaga la portadora y a cuál la envolvente?

10.- Hallar la función del tiempo que tiene como coeficientes de Fourier  $C_n=C$  (constante) para  $n=M$  hasta  $M+N$  ( $M \gg N$ ). Dar el valor de la frecuencia portadora. Estimar su ancho temporal  
Repetir los puntos b y c del problema anterior.

11.- Demuestre la siguiente igualdad

$$\int_0^{\lambda} e^{inkx} e^{imkx} dx = \lambda \delta_{nm}$$

donde  $n$  y  $m$  son enteros distintos de cero y  $\delta_{nm}$  es la delta de Krönecker.

12.- Grafique por medio de una computadora la moduladora resultante de superponer 11 ondas de igual amplitud equiespaciadas, si la portadora se toma como la frecuencia más baja, la más alta o la media. Discuta la relevancia de las diferencias y como dependen del ancho de banda relativo (relación entre  $\Delta\omega$  y  $\omega$ ).