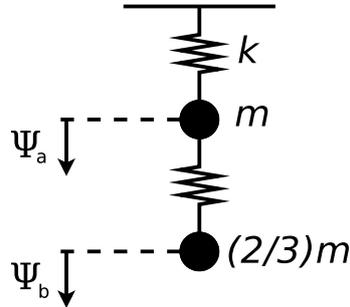
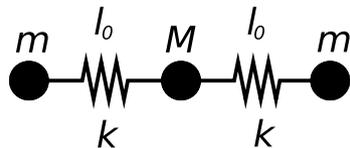


GUÍA 2: OSCILACIONES CON POCOS GRADOS DE LIBERTAD

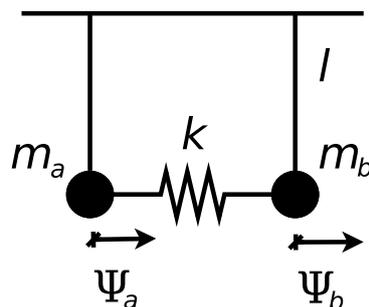
1.



- a) Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad y obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
 - b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.
 - c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.
2. Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_0 . Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales, supondremos que las masas se encuentran dentro de una canaleta que impide todo tipo de movimiento en la dirección transversal.

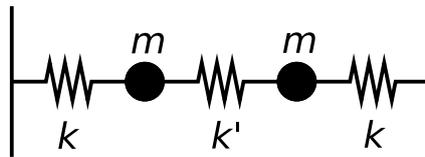


- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.
 - b) Halle las frecuencias de los modos normales.
 - c) Dibuje las configuraciones de cada modo.
 - d) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).
3. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b , acoplados mediante un resorte de constante k .

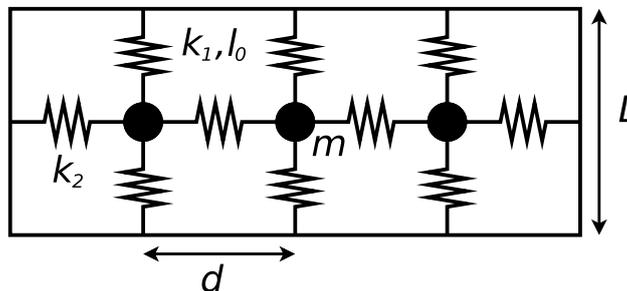


- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
- Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
- Suponiendo que el acoplamiento es débil, es decir: $k \ll \frac{g}{l} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$, y que las condiciones iniciales son $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$; obtenga el movimiento de cada masa y gráfiquelo en función del tiempo.
- Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b , donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

4. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k' .



- Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.
 - ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?
5. Considere el sistema de la figura, en la que los resortes verticales tienen longitud natural l_0 y constante k_1 , y los horizontales $a_0 = 0$ (slinkies) y k_2 .



- Plantee las ecuaciones de movimiento del sistema y observe que, para pequeñas oscilaciones, se desacoplan el movimiento horizontal del vertical.
- Calcule las frecuencias propias y los modos normales.
- Considere que las condiciones iniciales son tales que el sistema oscila horizontalmente, estando su movimiento descrito por una superposición de los dos primeros modos. Halle la energía cinética de cada masa y la energía potencial del sistema, el promedio temporal de las mismas y la frecuencia de pulsación ω_p .

Datos: $l_0, k_1, a_0 = 0, k_2, L, d, m$.

6. Dado un sistema de 2 péndulos acoplados (como en el ejercicio 3), se realiza una fuerza periódica sobre el primero de ellos que puede ser descrita por $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.
- Utilizando los resultados del ejercicio 3, reescriba las ecuaciones de movimiento en la base de modos normales.
 - Proponga una solución para cada modo, utilizando los resultados del ejercicio 5 de la guía 1. Asuma tiempos suficientemente largos para poder quedarse únicamente el movimiento estacionario.
 - Reescriba la solución bajo la condición de amortiguamiento despreciable.

d) A partir de las soluciones encontradas y la matriz de cambio de base, escriba el movimiento de cada partícula. Muestre que:

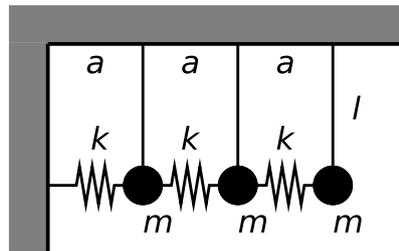
$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2M} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2M} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2};$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

7. Considere el sistema de 3 péndulos acoplados que se muestra en la figura.



- Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre las frecuencias propias y los modos normales del sistema.
- Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre la solución estacionaria para cada modo. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?